Digitale Bibliothek Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

UB Braunschweig 84
2301-958-6

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Leitfaden

der

allgemeinen Arithmetik und Algebra

für

Gymnasien,

höhere Bürger- und Gewerbeschulen

besonders auch als

Commentar zu der Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, herausgegeben von E. Heis,
zu gebrauchen,

einfach und leicht faßlich dargestellt

von

David Giffhorn,
Lehrer der Mathematik am Obergymnasium zu Braunschweig.

Braunschweig,
Verlag der Schulbuchhandlung.
1861.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Ankündigung.

Der Leitfaden der allgemeinen Arithmetik und Algebra ist zunächst aus des Verfassers eigenem Bedürfniß hervorgegangen und für Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen bestimmt, um Lehrern und Schülern das zugleich zeitraubende und widerwärtige Dictiren und Nachschreiben zu ersparen. Hoffentlich wird er aber auch für das Selbststudium beim Gebrauche einer passenden Aufgaben-Sammlung ersprießliche Dienste leisten, indem er nicht nur den Zusammenhang und die Verbindung der Sätze einfach darlegt, sondern auch die Beweise der einzelnen Sätze soweit ausführt, daß Jeder, dem es mit dem mathematischen Studium Ernst ist, sich leicht wird orientiren und das Einzelne nicht allein verstehen, sondern auch zur Lösung von Aufgaben aller Arten wird verwenden können.

Der Leitfaden schließt sich zwar zunächst an die Aufgaben-Sammlung von Heis an, und nimmt in der Algebra namentlich die erläuternden Beispiele meistentheils aus dieser Sammlung, weil sie den Stoff in den vielseitigsten Aufgaben verarbeitet und sehr verbreitet ist; wird aber eben so gut als Leitfaden neben der Sammlung von Meier Hirsch oder irgend einer andern Sammlung gebraucht werden können, wenn sie den Stoff zu den Uebungen nur zu allen Lehrsätzen und Aufgaben des Leitfadens bringt, und dies thut die Heis'sche Sammlung am besten.

Die beigegebenen Tabellen der Quadrat- und Kubikzahlen, der Quadrat- und Kubikwurzeln, der Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 — 100, sowie eine Tabelle zur Vergleichung verschiedener Maß- und Gewichtseinheiten werden den Gebrauch des Buches erleichtern.

Braunschweig, 1861.

Schulbuchhandlung.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Leitfaden

der

elementaren Mathematik

für

Gymnasien,

höhere Bürger- und Gewerbeschulen.

In drei Abtheilungen.

Einfach und leicht faßlich dargestellt

von

David Gifhorn,
Lehrer der Mathematik am Obergymnasium zu Braunschweig

Erste Abtheilung.

Leitfaden der allgemeinen Arithmetik und Algebra.

Braunschweig,
Verlag der Schulbuchhandlung.
1861.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

2301-958 6

Leitfaden

der

allgemeinen Arithmetik und Algebra

für

Gymnasien,

höhere Bürger- und Gewerbeschulen

besonders auch als

Commentar zu der Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, herausgegeben von E. Heis, zu gebrauchen,

einfach und leicht faßlich dargestellt

von

David Giffhorn,
Lehrer der Mathematik am Obergymnasium zu Braunschweig.

Bibliothek
der Verlagsbuchhandlung
FRIEDR. VIEWEG & SOHN
Braunschweig

Braunschweig,
Verlag der Schulbuchhandlung.
1861.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK BRAUNSCHWEIG

Druck von C. Landsiedel (früher Scheel'sche Buchdruckerei) in Cassel.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Leitfaden

der

allgemeinen Arithmetik und Algebra.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Vorwort.

Ueber Inhalt, Form und Gebrauch des Leitfadens mögen folgende Bemerkungen als Vorwort dienen.

Der Leitfaden wird das ganze Gebiet der elementaren Mathematik, einschließlich der sphärischen Trigonometrie, umfassen, aus drei Abtheilungen bestehen:

I. Abtheilung: Arithmetik und Algebra,

II. Abtheilung: Geometrie und ebene Trigonometrie,

III. Abtheilung: Stereometrie, und sphärische Trigonométrie,

und in drei mäßigen Bänden erscheinen, von denen der erste vorliegt. Die beiden anderen Abtheilungen sollen im Laufe des nächsten Jahres folgen, und werden nach ähnlichen Voraussetzungen und Zielen gearbeitet sein.

Der Leitfaden der Arithmetik und Algebra setzt nicht nur die Kenntniß der Regeln des Ziffernrechnens für die vier Species in ganzen und gebrochenen Zahlen voraus, sondern zugleich auch eine gewisse Fertigkeit im Rechnen mit solchen Zahlformen.

Er bringt hoffentlich Alles, was in der Praxis gebraucht wird und für das weitere Studium nothwendig und ausreichend ist.

Er will Nichts geben, was nicht im Folgenden verwendet wird und im Vorhergehenden begründet ist.

Er schließt sich an die Sammlung von Heis an, weil sie sehr verbreitet ist, eines Leitfadens als Commentar bedarf und den Stoff in sehr passender Ordnung und an den vielseitigsten Aufgaben behandelt.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Er ist für Lehrer und Schüler als Grundlage und Wegweiser des Unterrichts und der Repetition bestimmt und bedingt daneben den Gebrauch irgend einer Aufgabensammlung, da der erläuternden Beispiele, um den Zusammenhang des Inhalts nicht zu sehr zu unterbrechen und den Lehrer zu geniren, nur wenige gegeben sind.

Er wird hoffentlich beim Gebrauche einer Sammlung von Aufgaben auch für das Selbststudium nicht durch zu große Kürze unverständlich sein. Nach des Verfassers Erfahrung sind für den Anfänger die vorzugsweise zum Selbststudium bestimmten breit ausgetretenen Lehrgänge die unerträglichsten und ungeeignetesten, da sie sehr leicht Widerwillen gegen das Studium einflößen.

Der Inhalt soll in der äußern Ausstattung gesondert und gegliedert erscheinen ohne in zu viele einzelne Sätze zerrissen zu sein. Die einzelnen Zahlen vor den Sätzen dienen mehr zum Citiren als zur Gliederung.

Die angehängten Tabellen werden bei Uebungsaufgaben in der Schule nützliche Dienste leisten.

Wenn dem Versuche eine freundliche Aufnahme zu Theil wird, so soll dem Leitfaden der Arithmetik noch ein Anhang folgen, der von den Kettenbrüchen, Combinationen und ihrer Verwendung, sowie von den Gleichungen des dritten und vierten Grades handelt, und die Vorstufe für Analysis und Differenzialrechnung bildet.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Inhalt.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Vorbegriffe.

1. Die Arithmetik oder Zahlenlehre ist die Wissenschaft von den Zahlen. Sie beschäftigt sich mit dem Begriffe, dem Gebrauche, der Eintheilung, Bildung, Bezeichnung und Verbindung der Zahlen (Rechnen), entweder, um die Gesetze der verschiedenen Zahlenverbindungen (Rechnungsarten) kennen zu lernen, oder um mit Hülfe der erkannten Gesetze neue Zahlen aus gegebenen nach bestimmten Vorschriften ableiten zu können. Die Gesetze der Zahlenverbindungen entwickelt die allgemeine Arithmetik, die Regeln oder Vorschriften für die Auffindung von Zahlen aus andern gegebenen Zahlen gibt die Algebra. Die gewöhnliche bürgerliche Rechenkunst steht in demselben Verhältniß zur allgemeinen Arithmetik, wie die Feldmeßkunst zur Geometrie, sie ist ein untergeordneter praktischer Theil der Arithmetik. Was bedeutet das Wort Arithmetik? Welche Bezeichnung für den Inhalt der Wissenschaft verdient den Vorzug, Arithmetik (Zahlenlehre) oder Größenlehre?

2. Jede Zahl setzt eine Einheit voraus und gibt an, wie und wie vielmal dieselbe gesetzt ist. Beispiele: sechs, vier Pferde, fünf Schritte vorwärts, drei Schritte rückwärts.

3. Als Einheit kann jeder Gegenstand, jeder Theil eines Gegenstandes oder jeder Begriff dienen, da Allem und Jedem Einheit als unveräußerliche Eigenschaft zukommt. Beispiele: Menschen, Arme, Beine; Thaler, Groschen; Fuß, Zoll; Jahre, Tage; Pfund, Loth; Pferdekraft; Pferdelänge; Lichtstärke; Wärmegrad.

4. Ist die Einheit nicht bekannt oder benannt, so nennt man die Zahlen unbenannte (abstracte), im entgegengesetzten Falle dagegen benannte (concrete) Zahlen. Was fliegt dort in der Luft? Wie viele Gänse siehst du dort? Was verlangst du für das Pferd?

5. Die Zahlen dienen zunächst zur Bezeichnung der Menge gleichartiger oder ungleichartiger Dinge überhaupt (gleichbenannte, ungleichbenannte —

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

gleichnamige, ungleichnamige Zahlen), dann aber auch zum genauen Ausdruck für die Größe, Richtung, Lage u. s. w. der räumlichen Dinge.

6. Von der Größe eines räumlichen Gegenstandes (Linie, Fläche, Körper) erhalten wir durch das Messen eine deutliche Vorstellung. Messen heißt untersuchen, wie vielmal irgend eine bekannte Größe (Einheit, Maß) in einer andern Größe derselben Art enthalten ist. Die Zahl gibt die Größe eines Gegenstandes dadurch an, daß sie die Anzahl der Einheiten oder ihrer Theile nennt, die in der zu messenden Größe enthalten sind. Wie hoch ist der Thurm? Wie groß ist der Garten? Wie groß ist die Stube? —

7. Ganze Zahlen entstehen durch das ein- oder mehrmalige Setzen der Einheit selbst, Brüche dagegen durch das ein- oder mehrmalige Setzen eines Theiles der Einheit. Zu jedem Bruche gehören 2 Zahlen, Zähler und Nenner. Was bezeichnet der Zähler, was der Nenner bei einem Bruche? Was sind Stammbrüche, ächte und unächte Brüche, gemischte Zahlen?

Bemerkung. Andere Zahlformen werden später bei den verschiedenen Rechnungsarten erklärt werden.

8. Die Zahlen werden durch hörbare Zeichen oder Zahlwörter und durch sichtbare Zeichen oder Ziffern und Buchstaben bezeichnet; drei; sieben; 4, 5; a, b.

9. Ueber Ursprung, Bedeutung, Bildung der Zahlwörter und Ziffern unterrichtet uns die Grammatik und die Geschichte der Sprache und Arithmetik. Die Arithmetik setzt die Zahlwörter und Ziffern als bekannt voraus, zeigt dagegen, wie mit wenigen Zeichen nach einem bestimmten Gesetze (System) jede auch noch so große Zahl bezeichnet werden kann.

10. Zahlensystem heißt jede Zählungsart, in der eine und dieselbe Menge von Einheiten zu Einheiten immer höherer Ordnungen zusammengefaßt wird. Die Anzahl der Einheiten, die auf eine höhere Einheit gehen, heißt Grundzahl, Basis des Zahlensystems. Die Zahlensysteme werden nach der Grundzahl zweitheilige, dreitheilige, zehntheilige genannt. In jedem Zahlensysteme bedarf man, die Null eingeschlossen, so vieler Ziffern zur Bezeichnung aller Zahlen, als die Grundzahl Einheiten enthält. Nach welchem Zahlensysteme zählen alle gebildeten Völker? Welche Vorzüge hat ein Zahlensystem mit einer größern Grundzahl? Welche Vorzüge würde das zwölftheilige Zahlensystem haben? Hatten die Römer ein anderes Zahlen- oder Ziffernsystem? Worin besteht die Unvollkommenheit der römischen Zahlenbezeichnung und welche Nachtheile führt sie fürs Rechnen mit sich?

11. Die Buchstaben sind allgemeine Zahlzeichen. Man bedient sich ihrer theils um große Zahlen mit einem Zeichen bequemer zu bezeichnen (π, e,) oder um Gesetze und Regeln der Zahlenverbindungen einfach, anschaulich und allgemein darstellen zu können. Sie vertreten in Verbindung mit den übrigen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

arithmetischen Zeichen die geometrische Construction und dienen zur Versinnlichung (Evidenz) der abstracten arithmetischen Begriffe und Lehren.

12. Zahlen oder besser Ziffern mit einander nach bestimmten Gesetzen oder Vorschriften verbinden, um daraus andere Zahlen herzuleiten, heißt rechnen. Nach der Verschiedenheit der Vorschrift unterscheidet man verschiedene Rechnungsarten.

13. Die zu verknüpfenden Zahlen müssen entweder abstracte oder gleichbenannte Zahlen sein. Drei Thaler und 5 Thaler; dreimal 5 Thaler.

14. Es können nie mehr als 2 Zahlen unmittelbar durch Rechnung mit einander verbunden werden.

15. Für die Arithmetik gelten folgende Sätze als Grundsätze: Jede Zahl oder Größe ist sich selbst gleich $a = a$, jede Zahl oder Größe ist allen ihren Theilen gleich; die Zahlenausdrücke, die einem und demselben dritten Ausdrucke gleich sind, sind auch unter sich gleich.

16. Wodurch wird die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Ausdrücke bezeichnet? Was ist eine Gleichung? Was versteht man unter Seiten der Gleichung? Wodurch wird eine Gleichung nicht gestört?

17. Die einfachste Zahlenverbindung, das einzige Postulat, der Arithmetik, auf welche alle übrigen zurückgeführt werden, ist das Zählen oder die Bildung der Zahlenreihe. Man zählt vorwärts oder rückwärts, indem man zu irgend einer Anzahl von Einheiten eine Einheit derselben Art hinzusetzt oder davon nimmt und dafür eine neue Zahl bildet. Z. B.: 7 und 1 sind 8; 7 weniger 1 sind 6; $a + 1$; $m - 1$.

18. Es gibt 7 einfache Rechnungsarten, 3 verbindende und 4 ihnen entgegengesetzte trennende:

Addition — Subtraction,
Multiplication — Division,
Potenzirung — { Radizirung, Logarithmirung.

Die vier ersten Rechnungsarten heißen schlechtweg die vier Species oder Arten.

19. Von jeder Rechnungsart hat man Folgendes zu merken:

a. ihren Begriff und die bei ihr gebräuchlichen Kunstausdrücke und Zeichen;
b. ihre allgemeine Form oder Formel, d. h. den Ausdruck ihres Gesetzes in Buchstaben und Rechnungszeichen;
c. die aus dem Begriffe der Rechnungsarten sich ergebenden nothwendigen Bedingungen in Bezug auf die Benennung der in ihnen vorkommenden Zahlen;
d. die Regeln für die Ausführung der Rechnung;
e. die Folgerungen aus ihr für die Ordnung der gegebenen Zahlen. —

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Begriff und Ausführung der Rechnungsarten an einfachen ganzen Zahlen.

§. 1.

Von der Addition.

1. Die einfachste Operation, die sich an das Zählen unmittelbar anschließt, erhält man, wenn zu einer Zahl nicht eine Einheit, sondern mehrere Einheiten oder eine Zahl hinzugefügt werden soll.

2. Zu einer Zahl eine andere addiren, heißt, ihr so viele Einheiten auf einmal zuzählen, als die zweite enthält.

3. Die Zahl, zu der addirt wird, heißt Augend, diejenige dagegen, welche addirt wird, Addend und die gesuchte Zahl Summe oder Aggregat. Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz (+), das zwischen die zu addirenden Zahlen gesetzt und „*plus*" oder „*zu*" gelesen wird. Die Summe wird durch das Gleichheitszeichen mit den gegebenen Zahlen verbunden.

4. Die allgemeine Form oder Formel der Addition ist demnach

$$a + b = (a + b); a + b = c; p + p = s.$$

5. Die zu addirenden Zahlen müssen in denselben Einheiten ausgedrückt sein, weil sonst von keinem Fortzählen die Rede sein kann.

6. Die Addition wird dadurch verrichtet, daß man den ganzen Addend auf einmal und nicht seine einzelnen Einheiten nach einander dem Augend zuzählt, denn im zweiten Falle würde man zählen, aber nicht addiren. Das Addiren setzt die Kenntniß der Summen aller einfachen oder einzifferigen Zahlen oder das „Eins und Eins" als bekannt voraus.

7. Augend und Addend können bei der Addition vertauscht werden, weil sich dadurch die Anzahl der Einheiten nicht ändert. Sie heißen darum auch zusammen Posten (positi numeri), Summanden. In Zeichen drückt man den Satz so aus:

$$a + b = b + a.$$

8. Buchstabenausdrücke können nur dann addirt werden, wenn sie denselben Buchstaben als gemeinschaftliche Einheit enthalten. Die Addition wird in diesem Falle an den ihnen voranstehenden Ziffern oder Buchstaben (Ziffern- oder Buchstaben-Coefficienten) vollzogen.

Beispiele: $6a + 4b = (6a + 4b); 6a + 4a = (6 + 4)a$

$$ma + nb = (ma + nb); ma + na = (m + n)a.$$

9. Jede ganze Zahl läßt sich als eine Summe von Einheiten betrachten.

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$a = \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \overset{4}{1} \ldots + \overset{a-1}{1} + \overset{a}{1}.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 2.
Von der Subtraction.

1. An die Addition, welche aus den Posten die Summe finden lehrt, schließt sich die ihr entgegengesetzte Operation an, aus der Summe die Posten zu finden. Diese Aufgabe aber ist unbestimmt und führt zu sehr verschiedenen Zahlen, da sich eine Summe auf sehr verschiedene Weise aus 2 Zahlen gebildet haben kann; sie wird bestimmt, sobald außer der Summe auch noch der eine Posten gegeben ist. Diese Aufgabe führt zu der ersten trennenden Operation, dem Subtrahiren. —

2. Subtrahiren heißt demnach, aus der Summe und dem einen Posten den andern Posten suchen oder eine Zahl suchen, die zu einer gegebenen Zahl addirt eine andere gleichfalls gegebene Zahl als Summe gibt.

3. Die gegebene Summe heißt bei der Subtraction Minuend, der gegebene Posten Subtrahend und der gesuchte Posten Rest (*n. qui restat*) oder Differenz (Unterschied). Das Zeichen der Subtraction ist ein liegender Strich (—), der zwischen Minuend und Subtrahend gesetzt und *minus* oder weniger gelesen wird. Die Differenz wird mit den gegebenen Zahlen durch das Gleichheitszeichen verbunden.

4. Die allgemeine Form ist:

$$a - b = (a - b);\, a - b = c;\, M - S = D.$$

Mit dieser stehen die beiden andern Formen

$$M = S + D \text{ und } S = M - D$$

in unmittelbarem Zusammenhange und drücken die gegenseitige Abhängigkeit der 3 Zahlen von einander aus. Wie lauten sie in Worte eingekleidet?

5. Aus dem Begriffe der Subtraction und ihrem Verhältnisse zur Addition folgt, daß die beiden gegebenen Zahlen und der Rest in denselben Einheiten ausgedrückt sein müssen.

6. Die Subtraction wird entweder durch ein Zuzählen zum Subtrahenden oder durch ein Rückwärtszählen vom Minuenden verrichtet. Im ersten Falle gibt die Zahl der hinzu gelegten Einheiten den Rest, im zweiten Falle aber die übrig gebliebene Zahl. Die Subtraction setzt wie die Addition das Eins und Eins als bekannt voraus. Worin hat das doppelte Verfahren bei der Subtraction seinen Grund? In welchem Falle ist das eine oder andere Verfahren vorzuziehen? Werden beide Posten nach derselben Regel gefunden und warum?

7. Minuend und Subtrahend dürfen natürlich nicht vertauscht werden, da die Summe das Ganze und der Subtrahend ein Theil ist.

8. Für die Ausführung der Subtraction an Buchstabenausdrücken gelten die Regeln der Addition. Die Subtraction wird an den Coefficienten vollzogen.

Beispiele: $5a - 3b = (5a - 3b);\, 7m - 3m = (7 - 3)m = 4m$

$$ma - nb = (ma - nb);\, ma - na = (m - n)\,a.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

9. Jede ganze Zahl läßt sich als Differenz der nächst größeren Zahl und der Einheit darstellen;

$$6 = 7 - 1;\ a = (a + 1) - 1.$$

§. 3.

Von der Multiplication.

1. Zu der nächsten verbindenden Operation, der Multiplication, kommt man, wenn nicht verschiedene Zahlen, sondern eine und dieselbe Zahl mehreremale zu sich selbst addirt, das Resultat aber nicht durch wiederholtes Addiren, sondern auf einmal, durch einen Act, gefunden werden soll.

2. Eine Zahl mit einer andern multipliciren, heißt demnach, eine Zahl so vielmal als Summand setzen oder zu sich addiren, als eine zweite Zahl anzeigt.

3. Die Zahl, welche als Summand gesetzt oder multiplicirt werden soll, heißt Multiplicand, die, mit welcher multiplicirt werden soll, Multiplicator und die gesuchte Zahl Product (n. qui productus est). Das Zeichen der Multiplication ist ein liegendes Kreuz $\times$ oder ein Punkt (.), das zwischen die zu multiplicirenden Zahlen gesetzt und „mal" gelesen wird. Die gesuchte Zahl wird mit den gegebenen Zahlen durch das Gleichheitszeichen verbunden. Sind Multiplicand oder Multiplicator oder beide zugleich Buchstaben, so werden sie auch ohne irgend ein Zeichen dicht neben einander gestellt, und umgekehrt, stehen zwei oder mehrere Buchstaben ohne Zeichen dicht neben einander, so bedeuten sie, wenn nichts Anderes ausdrücklich festgesetzt ist, in der Arithmetik immer ein Product. Warum darf diese Bezeichnung der Multiplication nicht bei Zahlen stattfinden?

4. Die allgemeine Form der Multiplication ist demnach:

$$a \times b = a\,.\,b = a\,b;\ a \times b = c;\ M\,.\,m = p.$$

5. Bei der Multiplication muß der Multiplicator immer eine unbenannte Zahl sein, da er nur angibt, wie oft der Multiplicand gesetzt werden soll. Die Benennung des Productes richtet sich nach der Benennung des Multiplicanden.

Beispiele: $3\,.\,4$; 3 Thaler $.\,3$; a Thaler $.\,b = a\,b$ Thaler.

6. Die Multiplication wird nicht durch ein wiederholtes Addiren des Multiplicanden, sondern durch einen einzigen Act, wie die Addition, vollzogen. Sie setzt die Addition und die Producte aller einfachen einziffrigen Zahlen, das „Einmaleins", als bekannt voraus.

7. Multiplicand und Multiplicator können mit einander vertauscht werden und führen deshalb den gemeinschaftlichen Namen Factoren. Denn

$$4\,.\,3 = 4 + 4 + 4 = 1\,.\,4\,. + 1\,.\,4 + 1\,.\,4 = (1 + 1 + 1)\,4 = 3\,.\,4.$$

oder allgemein:

$$a.b = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots \overset{b}{a} = \overset{1}{1}.a + \overset{2}{1}.a + \overset{3}{1}.a \ldots \overset{b}{1}.a = (\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} \ldots \overset{b}{1})a = b.a.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

8. Bei Buchstabenausdrücken wird die Multiplication durch einfaches Nebeneinanderschreiben vollzogen. Wie Buchstabenausdrücke mit Coefficienten multiplicirt werden, wird im folgenden Abschnitte gezeigt werden.

9. Jede Zahl läßt sich als ein Product aus der Einheit und sich selbst ansehen. $6 = 1 . 6$. Fällt der eine Factor, die Zahl selbst, bei irgend einer Rechnung fort, so muß der andere Factor die 1 geschrieben werden, welche Bemerkung für die Division und Potenzirung von Wichtigkeit ist.

§. 4.
Von der Division.

1. So wie der Addition die Subtraction gegenüber steht, ebenso steht der Multiplication eine andere Operation gegenüber, welche aus dem Producte die Factoren finden lehrt. Diese Aufgabe ist unbestimmt, so lange nur das Product gegeben ist, da sich ein Product auf sehr verschiedene Weise aus 2 Factoren gebildet haben kann. Sie wird bestimmt, wenn außer dem Producte noch ein Factor gegeben ist und diese Aufgabe führt zur zweiten trennenden Operation, zur Division.

2. Dividiren heißt demnach, aus dem Producte und dem einen Factor den andern Factor suchen, oder eine Zahl suchen, die mit einer gegebenen Zahl multiplicirt, eine andere gleichfalls gegebene Zahl zum Producte gibt. —

3. Das gegebene Product oder die Zahl, in welche dividirt werden soll, heißt Dividend, der gegebene Factor Divisor und die gesuchte Zahl Quotient (quoties). Das Zeichen der Division ist ein Kolon (:), auf dessen linker Seite der Dividend und auf dessen rechter Seite der Divisor steht ($a:b$) oder ein liegender Strich, über dem der Dividend und unter dem der Divisor steht. Der Quotient wird durch das Gleichheitszeichen mit den gegebenen Zahlen verbunden.

4. Die allgemeine Form der Division ist demnach:

$$a:b = \frac{a}{b}; \frac{a}{b} = c; \frac{D}{d} = q.$$

Mit dieser stehen die beiden andern Formen:

$$D = d \,.\, q \text{ und } \frac{D}{q} = d$$

in unmittelbarem Zusammenhange und drücken die gegenseitige Abhängigkeit der drei Zahlen von einander aus. Wie lauten diese Formeln in Worte eingekleidet?

5. Aus dem Begriffe der Division und ihrem Verhältniß zur Multiplication folgt unmittelbar, daß Dividend und Divisor entweder gleich benannt sein müssen oder daß der Dividend benannt und der Divisor unbenannt ist. Im ersten Falle ist der Quotient unbenannt, im zweiten Falle gleich benannt mit dem Dividenden. Niemals aber kann der Dividend unbenannt und der

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Divisor benannt sein, weil ein unbenanntes Product sich nie aus einem benannten Factor gebildet haben kann.

6. Die Division wird entweder als wiederholte Subtraction des Divisors oder als Zerlegung des Dividenden in Stücke, die dem Divisor gleich sind, gedacht. Im ersten Falle ist die Anzahl der abgezogenen Divisoren der Quotient, im andern Falle die Zahl der Stücke, die dem Divisor gleich sind. Im erstern Falle ist die Division ein Vergleichen oder Messen, im zweiten Falle ein Theilen oder Theil bestimmen; das erstere findet statt, wenn der Dividend oder Divisor benannt sind, das andere dagegen, wenn der Divisor unbenannt ist. Sind Divisor und Dividend unbenannt, so ist es gleichgültig, wie man sich die Divisionsaufgabe denkt. In allen Fällen wird aber, bei der Division wie bei der Multiplication, das „Einmaleins" als bekannt vorausgesetzt, um alle einziffrigen Quotienten unmittelbar angeben zu können.

7. Dividend und Divisor dürfen ebensowenig vertauscht werden, wie Minuend und Subtrahend bei der Subtraction. —

8. Bei verschiedenen Buchstabenausdrücken wird die Division durch Uebereinanderschreiben, bei gleichen Ausdrücken dagegen an den Coefficienten vollzogen.—

9. Jede Zahl läßt sich als Quotient aus ihr selbst durch die Einheit darstellen

$$a = \frac{a}{1}. —$$

§. 5, a.

Potenziren.

1. Zu der nächsten verbindenden Operation, dem Potenziren, kommt man, wenn nicht verschiedene Factoren, sondern eine und dieselbe Zahl mehreremale mit sich multiplicirt, das Resultat aber nicht durch wiederholtes Multipliciren, sondern durch einen eigenthümlichen Act gefunden werden soll.

2. Eine Zahl mit einer andern potenziren, heißt demnach, dieselbe so oft als Factor setzen, als die zweite Zahl anzeigt. —

3. Die zu potenzirende Zahl heißt Basis, Grundzahl, Dignand, die Zahl, welche angibt, wie vielemal die zu potenzirende Zahl als Factor gesetzt werden soll, Exponent und die gesuchte Zahl Potenz. — Bei der Potenzirung wird der Exponent oben rechter Hand an die potenzirende Zahl gesetzt und „hoch" oder „zur" gelesen. Z. B.: $a^3 = a$ hoch 3 oder a zur dritten (Potenz). Das Resultat, die Potenz, wird durch das Gleichheitszeichen mit den gegebenen Zahlen verbunden.

4. Die allgemeine Form der Potenzirung ist demnach:

$$(a)^m = (a.a.a.a.a\ldots\overset{m}{a}) = a^m;\ 2^3 = 2.2.2 = 8.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

5. Beim Potenziren müssen beide gegebene Zahlen und demnach auch die Potenz als unbenannt gedacht werden.

6. Das Potenziren wird nicht durch ein wiederholtes Multipliciren, sondern durch einen eigenthümlichen Act vollzogen, der später gelehrt werden soll. Vorläufig werden wir jedoch die Potenzen durch wiederholtes Multipliciren bilden. Fürs praktische Rechnen ist es vortheilhaft, sich mit den ersten Potenzen der einziffrigen Zahlen bekannt zu machen und sie in einer kleinen Potenztafel zusammen zu stellen.

7. Exponent und Grundzahl können bei ganzen Zahlen nicht mit einander vertauscht werden, ausgenommen in $2^4 = 4^2 = 16$. Darum stehen der Potenzirung zwei trennende Operationen, die Radizirung und Exponenzirung, gegenüber, während der Addition und Multiplication nur eine gegenüber steht. —

8. Wie Buchstabenausdrücke mit Coefficienten potenzirt werden, wird später gelehrt werden.

9. Keine Zahl erscheint als Potenz von 1, denn jede Potenz von 1 ist wieder eins, wie später ganz allgemein gezeigt werden wird.

§. 5, b.

Vom Wurzelausziehen oder Radiziren.

1. Der Potenzirung stehen zwei Operationen entgegen, bei denen die Potenz und Exponent oder Grundzahl gegeben sind, die Grundzahl oder der Exponent gesucht wird.

2. Eine Zahl mit einer andern radiziren (Wurzelausziehen) heißt demnach, aus der Potenz und dem Exponenten die Basis oder Grundzahl suchen.

3. Die gegebene Potenz heißt Radicand, der gegebene Exponent Wurzelexponent und die gesuchte Basis Wurzel (radix). Das Zeichen der Radizirung ist ein verzogenes lateinisches *r* ($\sqrt{\ }$), in dessen Oeffnung der Exponent und unter welches der Radicand gesetzt und das „Wurzel aus" gelesen wird. Die Wurzel wird durch das Gleichheitszeichen mit dem Wurzelausdruck (kurze Bezeichnung für die gegebenen Zahlen) verbunden. Der Exponent 2 wird gewöhnlich nicht geschrieben und $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

4. Die allgemeine Form der Radizirung eines Wurzelausdruckes ist demnach:

$$\sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a});\ \sqrt[n]{a} = b\ .\ \sqrt[4]{81} = 3;\ \sqrt[3]{125} = 5.$$

Radicand und Exponent müssen unbenannte Zahlen sein.

6. Wie die Radizirung vollzogen wird, kann erst später gezeigt werden; an dieser Stelle genügt es, mit Hülfe der Potenztafel Wurzeln aus ganzen Zahlen, die vollkommene Potenzen sind, aufzusuchen.

7. Radicand und Exponent dürfen nicht vertauscht werden.

8. Keine Zahl läßt sich als Wurzel von 1 denken.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 5, c.

Vom Exponenziren oder Logarithmiren.

1. Die zweite dem Potenziren entgegengesetzte trennende Operation ist das Exponenziren, bei dem Potenz und Basis gegeben sind und der Exponent gesucht wird.

2. Eine Zahl mit einer andern logarithmiren oder exponenziren heißt demnach, eine Zahl suchen, mit der eine gegebene Zahl potenzirt, die andere gegebene Zahl zur Potenz gibt.

3. Die Zahl, welche als Potenz erscheint oder logarithmirt werden soll, heißt Logarithmand, die gegebene Grundzahl Basis und die gesuchte Zahl, der Exponent, Logarithmus. Als Zeichen der Logarithmirung dient die erste Sylbe (oder der erste Buchstabe) des Wortes Logarithmus (*log.*, *l.*), hinter welches der Logarithmand und über welche die Basis gesetzt und das „Logarithmus für die Basis" gelesen wird. Der Logarithmus wird durch das Gleichheitszeichen mit dem log. Ausdrucke verbunden.

4. Die allgemeine Form der Logarithmirung ist demnach:

$$\overset{b}{log.}\, a = c;\ \overset{2}{log.}\, 16 = 4.$$

Mit dieser stehen die beiden andern Formen $a = b^c$ und $b = \sqrt[c]{a}$ in unmittelbarem Zusammenhange und drücken die gegenseitige Abhängigkeit der 3 Zahlen aus.

5. Die Zahlen erscheinen bei der Logarithmirung sämmtlich als unbenannte Zahlen.

6. Wie der Logarithmus gefunden wird, kann erst später gelehrt werden; hier genügt es, mit Hülfe der Potenztafel kleine Logarithmen aufzusuchen, um den Begriff zu erläutern.

7. Logarithmand und Basis können nicht vertauscht werden.

8. Keine Zahl kann als Logarithmus von 1 als Basis erscheinen.

§. 6.

Folgerungen aus dem Vorigen; Bedeutung und Gebrauch der Klammer.

1. Aus den in den früheren §§. entwickelten Sätzen folgt:
   a. daß die verbindenden Operationen in ganzen Zahlen immer unbedingt ausführbar sind;
   b. daß bei den trennenden Operationen das Resultat nur dann in einer ganzen Zahl erscheint, wenn der Subtrahend kleiner als der Minuend, der Dividend ein Vielfaches des Divisors, und der Radicand oder Logarithmand eine vollkommene Potenz der Basis oder Grundzahl ist;

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

c. daß man demnach, wie später gezeigt wird, durch die trennenden Operationen auch auf neue Zahlformen, auf algebraische, gebrochene, irrationale, imaginaire Zahlen geführt wird, wenn man diese Operationen in jedem Falle ausführen will;

d. daß die folgenden Operationen die vorhergehenden als bekannt voraussetzen und sich auf sie stützen;

e. daß die Benennung der Zahlen bei den Rechnungsarten allmählich verschwindet und daß zuletzt bei der Potenzirung nur mit unbenannten Zahlen gerechnet wird;

f. daß jede Zahl durch die vier ersten Operationen aus der Einheit gebildet werden kann, während keine Zahl durch eine der 3 letzten Operationen aus der Einheit als Basis sich bilden läßt.

2. Nachdem in den vorigen §§. die Begriffe und Regeln für die Rechnung mit einfachen ganzen Zahlen aufgestellt sind, wird in den nächsten drei Abschnitten gezeigt werden, wie man mit den gewonnenen Rechnungsresultaten, den Summen $(a + b)$, den Differenzen $(a - b)$, den Producten $(a\,b)$ u. s. w. von Neuem rechnen kann. Dazu bedarf es neuer Kunstausdrücke und eines neuen Zeichens.

3. In jedem nicht einfachen Zahlen- oder Buchstabenausdruck (Formel) heißt jeder einzelne durch $+$ oder $-$ mit den andern verbundene Ausdruck ein Glied (terminus) und der ganze Ausdruck eingliedrig, zweigliedrig, vielgliedrig (ein Binomium, Trinomium, Polynomium). Die Zahlen, welche zu einem Producte, Quotienten, Potenz, Wurzelausdruck, Logarithmus verbunden sind, gelten für einfache eingliedrige Ausdrücke

$$a\,b - \frac{c}{d} + e - fg + a^m - \sqrt[2]{a} - \overset{b}{lg}\,r \ldots$$

4. Sind mehrere Zahlenverbindungen nach einander auszuführen, so werden sie nach Art unseres Schreibens und Lesens von links nach rechts ausgeführt.

5. Um anzudeuten, daß man nicht mit einer Zahl, sondern mit einem Rechnungsausdrucke, einer Zahlenverbindung, einem Resultate, kurz einer ganzen Formel rechnen soll, bedient man sich der Parenthesen (Klammern) oder eines Striches ( ), [ ], [( )], ([( )]), ———, z. B. die Ausdrücke

$$(a + b)\,c;\ (a + b) : c;\ \frac{a + b}{c};\ (a + b)^c;\ \sqrt[c]{a + b}\ \overset{c}{log.}\,(a + b)$$

bedeuten, daß mit c ein Resultat, eine Summe, ein Product, ein Quotient, u. s. w. multiplicirt, dividirt, potenzirt werden soll. Die Parenthese oder Klammer hat daher in der Arithmetik eine ganz andere Bedeutung, als in andern Schriften. Sie enthält nicht etwa Nebensachen und daher weniger zu Beachtendes, sondern verdient gerade die größte Beachtung. Darum soll ihr Gebrauch an einer Menge von Beispielen eingeübt werden, damit man nicht

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

nur sicher und rasch jeden in Worten ausgedrückten Rechnungsausdruck in die richtigen Zeichen übertragen, sondern auch jeden in arithmetischen Zeichen ausgedrückten Satz, jede Formel in Worte einkleiden und ausrechnen könne.

Erläuterung zu Beispiel 21 der Sammlung:

n bezeichnet das laufende Jahr	50	51	52	60
a den Rest von $\frac{n + 14}{19}$				17
b „ „ „ $\frac{n}{4}$				0
c „ „ „ $\frac{n + 1}{7}$				5
d „ „ „ $\frac{19\,a + 23}{30}$				16
e „ „ „ $2\,\frac{(b + 2\,c + 3\,d + 2)}{7}$				1
so fällt Ostern auf $(2\,2 + d + e)$ März				39
oder auf den $(d + e - 9)$ April				8

Erster Abschnitt.

Sätze über Addition und Subtraction von Summen und Differenzen.

§. 7.

Ueber das Addiren von Summen.

1. Soll an Summen die Addition vollzogen werden, so sind nur drei Fälle zu unterscheiden. Es kann nämlich entweder die Summe zu einer Zahl oder umgekehrt eine Zahl zu der Summe oder drittens Summe zu Summe addirt werden.

2. In allen drei Fällen ist die Vertauschung der Posten erlaubt, da die Anzahl der Einheiten in den Posten und also auch in der Summe nicht von ihrer Stelle abhängig ist. Der Satz über die Vertauschung der Posten gilt demnach allgemein auch von mehr als 2 Posten.

3. Zu einer Summe wird demnach eine Zahl addirt, wenn man sie zu irgend einem Posten, und zu einer Zahl wird eine Summe addirt,

Digitale Bibliothek Braunschweig

wenn man ihre Posten nach einander in beliebiger Ordnung zu der Zahl addirt. In Zeichen:

$$1.\quad (a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$$
$$2.\quad a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b.$$

4. In mehrgliedrigen Summenausdrücken ist die Klammer ganz nach Willkür zu setzen und wegzulassen.

5. In mehrgliedrigen Formeln oder Ausdrücken können die einzelnen Glieder in beliebiger Ordnung addirt werden.

6. Mehrgliedrige Buchstaben-Ausdrücke ordne man nach den Buchstaben, schreibe die gleichnamigen unter einander wie beim gemeinen Rechnen und addire ihre Coefficienten.

7. Jede mehrzifferige decadische Zahl läßt sich als Summe von Einheiten höherer und niederer Ordnungen ansehen.

Beispiel: $56473 = 50000 + 6000 + 400 + 70 + 3$,
$= 56000 + 473 = 56400 + 73$ u. s. w.

8. Mehrzifferige decadische Zahlen werden addirt, indem man Einheiten derselben Ordnung unter einander schreibt, die einzelnen gleichnamigen Einheiten addirt und die Summe als decadische Zahl schreibt.

9. Eine Anwendung von den Sätzen über die Vertauschung der Posten macht man bei der Aufgabe: Die Summe der ersten n Zahlen der Zahlenreihe zu finden. Soll die Summe der ersten n Zahlen unmittelbar ohne wiederholte Summirung gefunden werden, so addire man zu den einzelnen Gliedern der Reihe die Reihe in umgekehrter Ordnung, so erhält man aus je zwei Gliedern dieselbe Summe $= n + 1$. Da nun solcher Summen n vorhanden sind, so ist die Summe der beiden Reihen $= (n+1)\,n =$ der doppelten Summe einer Reihe. Daher die Summe der Reihe $\frac{n(n+1)}{2}$.
Wie lautet die Regel in Worten? Gilt der Satz auch von einer Zahlenreihe, die nicht mit 1 anfängt, in der aber die einzelnen Glieder nach demselben Gesetze fortschreiten?

10. Die Anzahl der Umstellungen (Permutationen) von verschiedenen Posten (Buchstaben, Ziffern, Elementen) läßt sich so bestimmen:

Ein Buchstabe gibt nur eine Stellung,

Zwei Buchstaben geben zwei (2.) Stellungen $ab - ba$.

Drei Buchstaben geben 3.2 Stellungen, da der hinzukommende dritte Buchstabe in jeder der zwei Stellungen drei verschiedene Plätze einnehmen kann. Vier Buchstaben geben $4.3.2$ Stellungen, da der vierte hinzukommende Buchstabe vier verschiedene Plätze in den 3.2 Stellungen von 3 Buchstaben einnehmen kann u. s. w.

Allgemein: n Buchstaben geben $n.(n-1)(n-2\ldots 3.2$. Stellungen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Wie lautet die Regel in Worten? Wie viele Permutationen geben 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Elemente?

§. 8.
Gegensatz zwischen Addition und Subtraction. Hervortreten der Null.

1. Eine Zahl oder eine Summe bleibt ungeändert, wenn zu ihr eine und dieselbe Zahl addirt und subtrahirt wird.

Formel: $a + b - b = a - b + b = a.$

2. Wenn man eine Differenz von ihrem Minuenden abzieht, so erhält man ihren Subtrahenden.

Formel: $a - (a - b) = b.$

Beweis: Denn $a = b + a - b = a$ (Nr. 1. Begriff der Subtraction).

3. Wenn Minuend und Subtrahend gleich sind, so ist der Rest $= 0.$

Formel: $a - a = 0.$

4. Null addirt oder subtrahirt läßt eine Zahl ungeändert.

Formel: $a - 0 = a$; $a + 0 = a.$

5. Eine Summe bleibt ungeändert, wenn man zu dem einen Posten dieselbe Zahl addirt, welche man von dem andern subtrahirt.

Formel: $a + b = (a + m) + (b - m).$

§. 9.
Verbindung einer Zahl mit einer Summe oder Differenz.

1. Eine Zahl wird von einer Summe subtrahirt, wenn man sie von einem Posten subtrahirt und den andern ungeändert läßt.

Formel: $(a + b) - c = + b = a - c b - c + a.$

Beweis: Denn addirt man Subtrahend und Rest, so erhält man den Minuend oder $c + (b - c + a) = a + b.$

2. Eine Zahl wird von einer Differenz subtrahirt, wenn man sie vom Minuenden subtrahirt oder aber zum Subtrahenden addirt und Subtrahend oder Minuend unverändert läßt.

Formel: $(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c).$

Beweis: Denn addirt man Subtrahend und Rest, so erhält man den Minuenden oder in Zeichen: $c + (a - c) - b = a - b.$

3. Eine Zahl wird zu einer Differenz addirt, wenn man sie zu dem Minuenden addirt und den Subtrahenden ungeändert läßt oder wenn man sie vom Subtrahenden subtrahirt und den Minuenden ungeändert läßt.

Formel: $(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c).$

Beweis: Denn addirt man auf beiden Seiten den Subtrahenden b so erhält man $a + c = a + c$, daher müssen auch die ursprünglichen Ausdrücke vor der Addition gleich gewesen sein.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 10.

Verbindung von Zahl und Differenz.

1. Eine Differenz wird zu einer Zahl addirt, indem man in beliebiger Ordnung den Minuenden addirt und den Subtrahenden subtrahirt.

Formel: $a + (b - c) = a + b - c = a - c + b.$

Beweis: Denn addirt man auf beiden Seiten den Subtrahenden c, so erhält man gleiche Resultate, also müssen auch die Ausdrücke vor der Addition gleich gewesen sein.

2. Eine Summe wird von einer Zahl subtrahirt, wenn man ihre Posten in beliebiger Ordnung nach einander subtrahirt.

Formel: $a - (b + c) = a - b - c = a - c - b.$

Beweis: Denn addirt man auf beiden Seiten den Subtrahenden nach den früheren Regeln, so erhält man den Minuenden.

3. Eine Differenz wird von einer Zahl subtrahirt, wenn man in beliebiger Ordnung den Minuenden subtrahirt und den Subtrahenden addirt.

Formel: $a - (b - c) = a - b + c = a + c - b.$

Beweis: Wie bei 2.

4. Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man mit Minuend und Subtrahend dieselbe Zahl durch Addition und Subtraction verbindet.

Formel: $a + b = (a + m) - (b + m) = (a - m) - (b - m).$

§. 11.

Verbindung einer Summe mit Summe oder Differenz.

1. Zwei Summen werden subtrahirt, wenn man die Posten des Subtrahenden von denen des Minuenden in beliebiger Ordnung einzeln subtrahirt. Ist ein Posten größer als einer oder mehrere im Minuenden, so kann man ihn in Stücke oder Posten zerlegen und seine einzelnen Posten subtrahiren, oder mehrere Posten des Minuenden vereinigen und von ihrer Summe subtrahiren.

Formel: $(a + b) - (c + d) = a + b - c - d = a - c + b - d$ u. s. w.

Beweis: Durch Addition des Subtrahenden.

2. Eine Summe wird zu einer Differenz addirt, wenn man sie zu dem Minuenden addirt oder von dem Subtrahenden subtrahirt.

Formel: $(a - b) - (c + d) = a - (c + d) - b = a - c - d - b$ u. s. w.

Beweis: Wie in den früheren §§.

3. Eine Summe wird von einer Differenz subtrahirt, wenn man sie zu dem Subtrahenden addirt oder von dem Minuenden subtrahirt.

Symbolisirung und Beweis wie früher.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 12.
Verbindung einer Differenz mit einer Summe oder Differenz.

1. Eine Differenz wird zu einer Summe addirt, indem man in beliebiger Ordnung ihren Minuenden addirt und den Subtrahenden subtrahirt.

Symbolisirung und Beweis wie in den früheren §§.

2. Eine Differenz wird von einer Summe subtrahirt, wenn man in beliebiger Ordnung den Minuenden subtrahirt und den Subtrahenden addirt.

3. Eine Differenz wird von einer Differenz addirt, indem man von der Summe ihrer Minuenden die Summe ihrer Subtrahenden subtrahirt.

Formel: $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)=a+c-b-d.$

Beweis: Wie in den früheren §§.

4. Eine Differenz wird von einer Differenz subtrahirt, wenn man von der Summe aus Minuend und Subtrahend die Summe aus Subtrahend und Minuend, beide im Minuend und Subtrahend genommen, subtrahirt.

Formel: $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)=a+d-b-c.$

Beweis: Wie in den früheren §§.

§. 13.
Anwendung der Sätze aufs Ziffernrechnen, aufs Rechnen mit mehrgliedrigen Formeln und aufs Auflösen von Klammern und Einschließen in Klammern.

Aus den in den §§. 8 bis 14 entwickelten Sätzen ergeben sich leicht folgende Folgerungen:

1. Mehrziffrige decadische Zahlen werden von einander subtrahirt, indem man Einheiten derselben Ordnung übereinanderschreibt, die einzelnen gleichnamigen Einheiten subtrahirt und die Differenz als decadische Zahl schreibt.

Wie verfährt man, wenn eine Ziffer des Subtrahenden kleiner ist als die darüber stehende des Minuenden? Was heißt eine Einheit der höhern Ordnung borgen? In welchen früheren §§. hat das Verfahren seinen Grund?

2. In mehrgliedrigen mit + oder — Zeichen versehenen Formeln oder Aggregaten können die einzelnen Glieder in beliebiger Ordnung mit Beibehaltung derselben Vorzeichen verbunden werden.

3. Löset man mehrgliedrige Formeln, die das + Zeichen vor sich haben, auf oder vollzieht die vorgeschriebenen Additionen, so behalten alle Glieder in der Klammer dieselben Vorzeichen.

4. Löset man dagegen mehrgliedrige Formeln mit dem — Vorzeichen auf, so erhalten alle Glieder in diesen Klammern die entgegengesetzten Vorzeichen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

5. Nach denselben Regeln, wie in 3 und 4, verfährt man, wenn mehrere Glieder in eine Klammer mit dem + oder — Vorzeichen eingeschlossen werden sollen.

Welches Vorzeichen ist hinzu zu denken, wenn das erste Glied in einer Klammer kein Vorzeichen hat? Wie verfährt man, um jeden mehrgliedrigen Ausdruck in eine zweigliedrige Summe oder Differenz zu verwandeln?

Zweiter Abschnitt.

Rechnung mit Produkten, Quotienten und Brüchen. Theilbarkeit der Zahlen. Decimalbrüche. Verhältnisse und Proportionen.

A. Rechnung mit Producten und Quotienten oder Brüchen.

§. 14.

Multiplication einer Summe oder Differenz mit einer Summe und umgekehrt.

1. Eine Summe oder Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jedes Glied mit der Zahl multiplicirt und die Theilproducte addirt oder subtrahirt.

Formel: $(p \pm q)\, n = pn \pm qn$

Beweis: Denn da n der Multiplicator, so soll, nach dem Begriffe der Multiplication (§. 4), der Multiplicand $(p \pm q)$ als Einheit oder Summand $n$mal gesetzt werden. Dies gibt

$$\begin{array}{l} 1.\ p \pm q \\ 2.\ p \pm q \\ 3.\ p \pm q \\ \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \quad p \pm q\ n. \\ \hline \text{daher } pn \pm qn. \end{array}$$

2. Eine Zahl wird mit einer Summe oder Differenz multiplicirt, wenn man sie mit jedem Gliede multiplicirt und die Theilproducte addirt oder subtrahirt, oder sie ebenso verbindet, wie die Glieder in dem Factor verbunden sind.

Formel: $n\,(p \pm q) = np \pm nq.$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beweis: Denn da $p \pm q$ Multiplicator, so soll n ebenso als Summand nach (§. 4) gesetzt werden, wie die Einheit selbst gesetzt ist, um den Multiplicator $p \pm q$ zu erzeugen, d. h. p mal $\pm q$ mal. Dies gibt $np \pm nq$.

3. Eine mehrgliedrige Formel wird mit einer Zahl multiplicirt oder umgekehrt, wenn man jedes Glied mit ihr multiplicirt und die Theilproducte ebenso verbindet, wie sie in dem gegebenen Factor verbunden sind.

Formel: $(a + b - c)\, n = n\, (a + b - c) = an + bn - cn$

Beweis: Der Beweis ist denen in 2 und 3 ähnlich.

4. Die Vertauschung der Factoren ist auch bei mehrgliedrigen Formeln gestattet.

5. Eine Anwendung dieser Sätze wird beim Multipliciren mehrziffriger decadischer Zahlen gemacht, indem man jede Ziffer der Zahl multiplicirt und die Theilproducte addirt, z. B.:

$$327 . 6 = (300 + 20 + 7)\, 6 = 300 . 6 + 20 . 6 + 7 . 6 .$$
$$= 1800 + 120 + 42 = \begin{array}{r} 18 \\ 12 \\ 42 \\ \hline 1962 \end{array}$$

6. Sollen mehrere Producte mit einem gemeinschaftlichen Factor addirt oder subtrahirt werden, so addire oder subtrahire man ihre ungleichen Factoren und gebe der mehrgliedrigen Formel den gemeinschaftlichen Factor zum Multiplicand oder Multiplicator. —

7. Die in 6 erklärte Vereinigung der Producte heißt gewöhnlich Absonderung eines gemeinschaftlichen Factors; das umgekehrte Verfahren dagegen oder die Ausführung einer angedeuteten Multiplication an einer mehrgliedrigen Formel heißt Entwicklung eines Products.

8. Bei der Absonderung von Factoren und bei der Entwicklung von Producten sind die Regeln über die Vorzeichen zu beachten. Erhält man bei der Absonderung von Factoren neue gemeinschaftliche Factoren, so können diese wiederum abgesondert werden. Sollte bei der Absonderung von Factoren ein eingeklammerter Factor gerade die entgegengesetzten Vorzeichen haben, so braucht nur das Vorzeichen vor seiner Klammer in das entgegengesetzte verwandelt zu werden, um ihn völlig übereinstimmend mit den übrigen zu machen.

Beispiel:
$$\begin{aligned} & ad + bd + ce - ae + bf - cf + af - cd - be \\ & = a(d - e + f) + b\,(d - e + f) + c\,(-d + e - f) \\ & = a(d - e + f) + b\,(d - e + f) - c\,(d - e + f) \\ & = (a + b - c)\,(d - e + f). \end{aligned}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 15.

Multiplication eines Productes mit einer Zahl und umgekehrt.

1. Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man nur irgend einen seiner Factoren mit der Zahl multiplicirt und die andern ungeändert läßt.

Formel: $(ab)c = (a\,.\,c)b = a(b\,.\,c) = abc = bca$ u. s. w.

Beweis: Denn da $ab = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3\dots b}{a \dots a} = \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3\dots a}{b \dots b}$ ist,

$$\text{so ist } (ab)c = (\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3\dots b}{a \dots a})c = (\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3\dots a}{b \dots b})c$$

$$= \overset{1}{ac} + \overset{2}{ac} + \overset{3\dots b}{ac \dots ac} = \overset{1}{bc} + \overset{2}{bc} \dots \overset{a}{bc}$$

$$= (ac)b. \qquad\qquad = (bc)a.$$

2. Eine Zahl wird mit einem Producte multiplicirt, wenn man sie mit den Factoren desselben nach einander in beliebiger Ordnung multiplicirt.

Formel: $a(bc) = (a\,.\,b)c = (a\,.\,c)b.$

Beweis: Denn da $bc = \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \dots \overset{c}{b} = \overset{1}{c} + \overset{2}{c} + \overset{3\dots b}{\dots c}$ ist,

$$\text{so ist } a.(bc) = a(\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \dots \overset{b}{b}) = \overset{1}{ab} + \overset{2}{ab} \dots \overset{c}{ab} = (ab)c.$$

3. In einem Producte aus mehreren Producten dürfen die Factoren in beliebiger Reihenfolge multiplicirt werden.

Formel: $(ab)(cde) = abcde = bcdea$ u. s. w.

4. Diese Sätze werden sehr häufig zur Vereinfachung der Rechnung, namentlich beim Kopfrechnen angewandt. Bald ist es vortheilhafter, mit einem Producte auf einmal, bald mit den Factoren nach einander zu multipliciren. Statt 4326 mit 48 zu multipliciren, multiplicire man mit 6 und 8 nach einander, so erhält man ohne eine Addition nöthig zu haben

$$(4326)\,.\,6\,.\,8$$
$$= 25956 \times 8$$
$$= 207648.$$

Statt 237 mit 5 und 6 zu multipliciren, multiplicire man mit 30. Statt mit 4 . 25, mit 8 . 125 multiplicirt man mit 100 und 1000. Statt mit 4 . 6 zu multipliciren, kann man auch mit 24 auf einmal leicht und bequem multipliciren, wenn man das Einmaleins von 24 im Gedächtniß hat.

5. Buchstaben-Producte mit Coefficienten werden multiplicirt, indem man das Product aus den Coefficienten dem Producte aus den Buchstabenfactoren vorangehen läßt.

6. Sollen Producte aus denselben Factoren oder Potenzen mit einander multiplicirt werden, so werden ihre Exponenten addirt.

Formel: $a^m\,.\,a^n = a^{m+n}.$

2*

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beweis: $a^m . a^n = \overset{1}{a} . \overset{2}{a} . \overset{3}{a} \ldots \overset{m}{a} \times \overset{1}{a} . \overset{2}{a} . \overset{3}{a} . \overset{4}{a} \ldots \overset{n}{a} = \overset{1}{a} . \overset{2}{a} \ldots \overset{m+n}{a} = a^{m+n}$

7. Umgekehrt ist eine Potenz mit einem Summen-Exponenten einem Producte aus den Potenzen seiner Posten gleich.

Formel: $a^{m+n} = a^m . a^n$

Beweis: Gerade umgekehrt zu führen, wie der in 6. Der Satz ist besonders bei der Absonderung von Factoren zu beachten.

§. 16.

Multiplication mehrgliedriger Ausdrücke.

1. Zwei mehrgliedrige Ausdrücke werden mit einander multiplicirt, indem man jedes Glied des Multiplicanden mit jedem Glied des Multiplicator multiplicirt und diejenigen Theilproducte addirt, die sich aus gleichen, diejenigen aber subtrahirt, die sich aus ungleichen Vorzeichen gebildet haben. Kurz ausgedrückt lautet die Regel: Gleiche Zeichen geben *plus* (+), ungleiche *minus* (—).

Formel: $(a+b-c)(d-e) = ad+bd-cd-ae-be+ce.$

Beweis: Denn ist $(a+b-c)$ Multiplicand und $(d-e)$ Multiplicator, so soll der Multiplicand $(a+b-c)$ $d$mal — $e$mal als Summand gesetzt werden. Dies gibt

$$\begin{aligned} &(a+b-c)\,d - (a+b-c)\,e \\ &= ad+bd-cd-(ae+be-ce) \\ &= ad+bd-cd-ae-be+ce. \end{aligned}$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man $(d-e)$ als Multiplicand und $(a+b-c)$ als Multiplicator betrachtet.

2. Hieraus folgt, daß auch bei mehrgliedrigen Formeln die Vertauschung der Factoren gestattet ist.

3. Auf den Satz über die Multiplication mehrgliedriger Formeln stützt sich das gewöhnliche Verfahren bei der Multiplication mehrziffriger Zahlen, indem jede Ziffer des Multiplicanden mit jeder des Multiplicator multiplicirt wird.

$$6324 \times 536 = (6000+300+20+4)(500+30+6)$$

4. In mehrgliedrigen Buchstabenausdrücken ordnet man die einzelnen Glieder gewöhnlich alphabetisch nach der Reihenfolge der Buchstaben oder nach steigenden oder fallenden Exponenten eines Buchstabens.

5. So wie es für das Multipliciren von Ziffern wichtig und unentbehrlich ist, das Einmaleins zu wissen, so muß man für das Rechnen mit Buchstabenausdrücken sich folgende Producte stets gegenwärtig erhalten:

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

1. $(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
4. $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$
5. $(a+b-c-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac$ $-2ad-2bc-2bd+2cd$
6. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
7. $(x^2+xy+y^2)(x-y)=x^3-y^3$
8. $(x^2-xy+y^2)(x+y)=x^3+y^3$.

Wie lauten diese Sätze in Worten? Bei der Rechnung mit welchen Ziffernbeispielen können sie mit Nutzen gebraucht werden? Wozu dient namentlich die dritte Formel? Wie kann man die vierte Formel auf die erste oder zweite Formel zurückführen?

Als Beispiel für die Ausführung der Multiplication mag Heis §. 16 Nr. 50 dienen:

$$\begin{array}{l}
q^3+(a+b)q^2+(a^2-b^2)q+(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)\\
\underline{q^2-(a-b)\;q+a^2\;-2ab+b^2}\\
q^5+(a+b)q^4+(a^2-b^2)q^3+(a-b)^3q^2\\
\quad+(a-b)q^4-(a^2-b^2)\;q^3-(a^2-b^2)(a-b)q^2-(a-b)^4q\\
\qquad\qquad\underline{-(a-b)^2q^3+(a-b)^2\;(a+b)q^2+(a-b)^2(a^2-b^2)q+(a-b)^5}\\
q^5+2bq^4-(a-b)^2q^3+(a-b)[(a-b)^2-2b]q^2+(a-b)^3 2bq+(a-b)^5.
\end{array}$$

§. 17.

Gegensatz zwischen Multiplication und Division. Hervortreten der Eins.

1. Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit einer und derselben Zahl zugleich multiplicirt und dividirt.

Formel: $(a.b):b=(a:b)b=a$.

2. Wenn man mit einem Quotienten in seinen Dividenden dividirt, so erhält man den Divisor.

Formel: $a:(a:b)=b$.

Beweis: Denn $a=b.a:b=a$ (Begr. der Division).

3. Wenn Dividend und Divisor gleich sind, so ist der Quotient 1.

4. Mit Eins multiplicirt oder dividirt, läßt eine Zahl ungeändert.

$$a\,.\,1=\frac{a}{1}=a$$

5. Ein Product bleibt ungeändert, wenn man den einen Factor mit derselben Zahl multiplicirt, mit der man den andern dividirt.

$$a\,.\,b=(a\,.\,m)\,.\,\frac{b}{m}.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 18.

Erweiterung und Hebung von Quotienten.

1. Ein Quotient bleibt seinem Werthe nach ungeändert, wenn man Dividend und Divisor zugleich mit derselben Zahl multiplicirt und dividirt.

Formel: $\frac{a}{b} = \frac{a \,.\, n}{b \,.\, n} = \frac{a : n}{b : n}$

Beweis: Denn multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Divisor b, so erhält man durch Anwendung der früheren Sätze

$$a = \frac{a \,.\, n}{b \,.\, n} \,.\, b = a.$$

2. Man bedient sich dieses Satzes, um Quotienten zu „erweitern" oder zu „heben", d. h. in größern oder kleinern Zahlen auszudrücken. Für „einen Quotienten heben" sagt man auch gemeinschaftliche Factoren streichen. Der Erweiterung von Quotienten bedient man sich, um sie auf vorgeschriebene Divisoren oder Dividenden zu bringen, der Streichung gemeinschaftlicher Factoren dagegen, um verwickelte Ausdrücke zu vereinfachen und statt großer Zahlen kleine zu substituiren. Bei der Hebung sondert man erst nach §. 14 die gemeinschaftlichen Factoren im Dividenden und Divisor ab und streicht dann die gleichen gegen einander. Bei der Erweiterung schreibt man zuerst den erweiterten Dividenden oder Divisor hin und formt nach ihm den Divisor oder Dividenden um. Doch werden die Multiplicationen meistens nur angedeutet, nicht wirklich ausgeführt, außer wenn durch den Wegfall von Gliedern der Ausdruck durch die Ausführung vereinfacht werden sollte.

Beispiel für das Heben:

$$\frac{21\,xz - 27\,yz - 28\,px + 36\,py}{35\,xz - 45\,yz + 56\,px - 72\,py}$$
$$= \frac{7x(3z - 4p) - 9y(3z - 4p)}{7x(5z + 8p) - 9y(5z + 8p)} = \frac{(7x - 9y)(3z - 4p)}{(7x - 9y)(5z + 8p)} = \frac{3z - 4p}{5z + 8p}.$$

Beispiel für die Erweiterung:

$$\frac{3a - 5b}{6c} = \frac{(3a - 5b)\,5ab}{30\,abc} = \frac{(3a - 5b)\,7cde}{42\,c^2de} = \frac{(3a - 5b)(3a + 5b)}{6\,c(3a + 5b)}.$$

§. 19.

Division einer mehrgliedrigen Formel durch eine Zahl. Vereinigung von Quotienten mit gleichen Divisoren.

1. Eine Summe oder Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jedes Glied durch sie dividirt und die Theilquotienten addirt oder subtrahirt.

Formel: $\frac{a \pm b}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}.$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beweis: Denn multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Divisor m, so erhält man $a \pm b = \left(\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}\right) m = \frac{a}{m} . m \pm \frac{b}{m} . m = a \pm b$.

2. Quotienten mit gemeinschaftlichen Divisoren werden addirt oder subtrahirt, indem man die Summe oder Differenz ihrer Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

Formel: $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$

Beweis: Wie bei Nr. 1.

3. Eine mehrgliedrige Formel wird durch eine Zahl dividirt, indem man jedes Glied durch sie dividirt und den Theilquotienten dieselben Vorzeichen, die sie in den Gliedern des Dividenden haben, gibt.

Formel und **Beweis:** Wie in 1.

4. Der dritte Satz wird wiederholt bei jeder Zifferndivision mehrziffriger Zahlen angewandt, indem man den Dividenden in Posten zerlegt, die Vielfache des Divisors sind und die einzelnen Posten dividirt. Bleibt zuletzt ein Stück, das kleiner ist als der Divisor (Rest), so kann bei ihm die Division nur angedeutet werden, indem man dem gefundenen Quotienten den Rest mit seinem Divisor anhängt.

Beispiel:
$$\frac{3972}{7} = \frac{3500}{7} + \frac{420}{7} + \frac{49}{7} + \frac{3}{7}$$
$$= 500 + 60 + 7 + \frac{3}{7} = 567 + \frac{3}{7}$$
$$= 567\,\frac{3}{7}.$$

5. Die allgemeine Formel für die Division ist demnach, wenn man Dividend, Divisor, Quotient und Rest mit D, d, q und r bezeichnet: $\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$ oder wenn man auf beiden Seiten mit d multiplicirt. $D = d\,q + r$. Wie lauten beide Formeln in Worten? Wie wird eine ganze Zahl mit einem angehängten Quotienten (gemischte Zahl) in einen Quotienten und umgekehrt verwandelt? Sollen Quotienten mit verschiedenen Divisoren (ungleichnamige Quotienten) vereinigt werden, so forme man sie nach §. 18 so um, daß sie gleiche Divisoren haben und vereinige dann ihre Dividenden mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen.

Beispiel: $\frac{3\,m}{7\,p^2\,q\,r^2} + \frac{11\,n}{3\,p^3\,r\,q\,s^2} + \frac{14\,n}{9\,p\,q^2\,r} - \frac{79}{5\,r^2\,p.}$

Der gemeinschaftliche Divisor ist $315\,p^3 q^2 r^2 s^2$ und das Resultat: $3\,m\,(45\,p\,q\,s^2) + 11\,n(105\,q\,r) + 14\,n(35\,p^2\,r\,s^2) - 7\,q(63\,p^2\,q^2\,s^2) = 135\,m\,p\,q\,s^2 + 1155\,n\,q\,r + 492\,n\,p^2\,r\,s^2 - 441\,p^2\,q^3\,s^2$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 20.

Identität eines Quotienten und Bruches.

1. Ein Quotient und ein Bruch sind ganz gleiche Ausdrücke, der Dividend entspricht dem Zähler, der Divisor dem Nenner des Bruches.

Formel: $a : b = \frac{a}{b}$.

Beweis: Denn $a : b = (\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} \dots \overset{a}{1}) : b = \overset{1}{\frac{1}{b}} + \overset{2}{\frac{1}{b}} + \overset{3}{\frac{1}{b}} \dots \overset{a}{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} \,.\, a = \frac{a}{b}$.

2. Alle Sätze von den Quotienten gelten deshalb auch von den Brüchen und umgekehrt. Wie werden Brüche addirt oder subtrahirt? Wodurch wird ein Bruch nicht geändert? Was heißt einen Bruch heben und erweitern? Wie wird ein Bruch in eine gemischte Zahl verwandelt? Durch welche Rechenoperation kommt man auf die gemischte Zahl und den Bruch? Was erhält man, wenn mit einer Zahl n in die nächst höhere $(n+1)$ oder kleinere $(n-1)$ dividirt wird? Welches Instrument gründet sich hierauf?

§. 21.

Division eines Productes, Multiplication und Division eines Quotienten oder Bruches durch eine Zahl.

1. Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, wenn man nur irgend einen Factor durch die Zahl dividirt und die anderen Factoren ungeändert läßt.

Formel: $(a \,.\, b) : c = \frac{a}{c} \cdot b = \frac{b}{c} \,.\, a$.

Beweis: Denn $(a \,.\, b) : c = (\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \dots \overset{b}{a}) : c = (\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \dots \overset{a}{b}) : c$

$$= \overset{1}{\frac{a}{c}} + \overset{2}{\frac{a}{c}} + \overset{3}{\frac{a}{c}} \dots \overset{b}{\frac{a}{c}} = \overset{1}{\frac{b}{c}} + \overset{2}{\frac{b}{c}} + \overset{3}{\frac{b}{c}} \dots \overset{a}{\frac{b}{c}}$$

$$= \frac{a}{c} \,.\, b \qquad = \frac{b}{c} \,.\, a.$$

2. Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man den Dividenden (Zähler) mit der Zahl multiplicirt und den Divisor (Nenner) ungeändert läßt oder wenn man den Dividenden ungeändert läßt und den Divisor dividirt.

Formel: $\frac{a}{b} \,.\, m = \frac{a\,m}{b}$ oder $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b : m}$.

Beweis: Durch Umkehrung des vorigen Beweises oder durch Multiplication beider Seiten mit b.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

3. Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl dividirt, wenn man den Dividenden (Zähler) dividirt und den Divisor (Nenner) ungeändert läßt.

Formel: $\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b.}$

Beweis: Denn multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Divisor c, so erhält man nach Anwendung der Regeln in den früheren §§.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b} . c = \frac{a : c . c}{b} = \frac{a}{b}.$$

4. Von dem ersten Satze wird immer beim Ziffernrechnen Gebrauch gemacht, wenn sich ein Factor, von dem zweiten Satze, wenn sich der Divisor, und von dem dritten Satze, wenn sich der Dividend ohne Rest dividiren läßt. Wie man in den beiden letzten Fällen verfährt, wenn die Division nicht ohne Rest möglich ist, lehrt der folgende §.

§. 22.

Division eines Quotienten (Bruches) durch eine Zahl und ein Product.

1. Ein Quotient (Bruch) wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Divisor (Nenner) mit der Zahl multiplicirt.

Formel: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b\,c} = \frac{a}{c\,b}.$

Beweis: Denn multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Divisor c, so erhält man $\frac{a}{b} = \frac{a}{b\,.\,c} . c = \frac{a\,.\,c}{b\,.\,c} = \frac{a}{b}.$

2. Eine Zahl wird durch ein Product dividirt, wenn man mit den Factoren nach einander in beliebiger Ordnung dividirt.

Formel: $\frac{a}{b\,.\,c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$

Beweis: Wie in 1.

3. Der erste Satz wird gebraucht, wenn sich der Dividend (Zähler) durch die Zahl nicht ohne Rest dividiren läßt; der zweite Satz besonders, um die Division mit mehrziffrigen Zahlen auf die Division mit einziffrigen oder kleinen zweiziffrigen Zahlen zurückzuführen, deren Einmaleins man kennt und deren Reste man bequem und sicher im Kopfe abziehen kann.

4. Potenzen oder Producte von gleichen Factoren werden durch einander dividirt, indem man den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividenden subtrahirt.

Formel: $a^m : a^n = a^{m-n}.$

Beweis: Denn $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overset{1}{a}\,\overset{2}{a}\,\overset{3}{a}\,\ldots\,\overset{m}{a}}{\overset{1}{a}\,\overset{2}{a}\,\overset{3}{a}\,\ldots\,\overset{n}{a}} = \overset{1}{a}\,\overset{2}{a}\,\overset{3}{a}\,\ldots\,\overset{m-n}{a} = a^{m-n}.$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Ist der Exponent des Divisors größer als der Exponent des Dividenden, so kommt die Potenz mit dem Unterschiede der Exponenten in den Nenner zu stehen, weil beim Heben der gleichen Factoren der Unterschied der Factoren im Nenner geblieben ist.

Beispiel: $\frac{a^7}{a^5} = \frac{a^5 \,.\, a^2}{a^5} = a^2; \frac{a^5}{a^7} = \frac{a^5}{a^5 \,.\, a^2} = \frac{1}{a^2}.$

§. 23.

Multiplication mit einem Quotienten oder Bruche.

1. Eine Zahl wird mit einem Quotienten oder Bruche multiplicirt, wenn man sie mit dem Dividenden (Zähler) multiplicirt und den Divisor (Nenner) ungeändert läßt.

Formel: $c \,.\, \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}.$

Beweis: Denn $c \,.\, \frac{a}{b} = (\overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} \ldots \overset{c}{1})\frac{a}{b} = \overset{1}{\frac{a}{b}} + \overset{2}{\frac{a}{b}} + \overset{3}{\frac{a}{b}} \ldots \overset{c}{\frac{a}{b}}$

$$= \frac{ac}{b}.$$

2. Zwei Quotienten oder Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man das Product ihrer Dividenden (Zähler) durch das Product ihrer Divisoren (Nenner) dividirt.

Formel: $\frac{m}{n} \,.\, \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$

Beispiel: Denn da $\frac{p}{q} = p \,.\, \frac{1}{q}$ so ist $\frac{m}{n} \,.\, \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \,.\, p \,.\, \frac{1}{q}$

$$= \frac{mp}{n} \,.\, \frac{1}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

3. Der erste Satz kann auch als specieller Fall des zweiten betrachtet werden, da jede ganze Zahl als ein Bruch mit dem Nenner 1 betrachtet werden kann.

4. Die Vertauschung der Factoren findet auch bei Brüchen statt, da die Multiplication der Brüche auf die Multiplication ganzer Zahlen zurückkommt.

5. Vor oder nach der Ausführung der Multiplication mit Brüchen können gemeinschaftliche Factoren in den Zählern und Nennern gegen einander kreuzweis gehoben oder gestrichen werden.

§. 24.

Division mit einem Quotienten (Bruche).

1. Eine Zahl wird mit einem Quotienten (Bruche) dividirt, wenn man sie in beliebiger Ordnung mit dem Dividenden (Zähler) dividirt und mit dem Divisor (Nenner) multiplicirt.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Formel: $a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} . c = \frac{a\,c}{b}$.

Beweis: Denn multiplicirt man auf beiden Seiten nach den früheren Regeln mit $\frac{b}{c}$, so erhält man

$$a = \frac{a}{b} \cdot c \times \frac{b}{c} = \frac{ac}{b} \cdot \frac{b}{c} = a.$$

2. Unter dem umgekehrten (reciproken, inversen) Werthe einer Zahl (Formel) versteht man die Einheit dividirt durch die Zahl. So ist z. B. der umgekehrte Werth von $8 = {}^1/_8$ von ${}^3/_4 = \frac{1}{{}^3/_4} = {}^4/_3$ von $2{}^1/_2 = \frac{1}{2{}^1/_2} = \frac{1}{{}^5/_2} = {}^2/_5$ von $a = \frac{1}{a}$ von $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$; von $a + \frac{c}{d} = \frac{1}{a + \frac{c}{d}} = \frac{d}{a\,d + c}$.

3. Der Satz in 1. läßt sich demnach auch so ausdrücken: Division mit einem Bruche ist Multiplication mit seinem umgekehrten Werthe.

4. Ein Quotient wird durch einen andern dividirt, wenn man den Quotienten ihrer Dividenden (Zähler) durch den Quotienten ihrer Divisoren (Nenner) dividirt.

Formel: $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m : p}{n : q}$

Beweis: Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Divisor $\frac{p}{q}$, so erhält man $\frac{m}{n} = \frac{m : p}{n : q} \times \frac{p}{q} = \frac{(m : p)\,p}{(n : q)\,q} = \frac{m}{n}$.

5. Der Satz in 4. kann auch so ausgedrückt werden: Ein Quotient Bruch) wird mit einem Quotienten (Bruche) dividirt, wenn man den Dividenden mit dem umgekehrten Werthe des Divisors multiplicirt.

Formel: $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \times \frac{q}{p} = \frac{m\,q}{n\,p}$.

Beweis: Wie in 4.

6. Der erste Satz kann auch ebenso wie im vorigen §. als specieller Fall des Satzes in 4. betrachtet werden.

7. Vor oder nach der Ausführung der Division können gemeinschaftliche Factoren in den Zählern und Nennern gegen einander gehoben werden. Vor der Ausführung, wie man kurz sagt, „wird Zähler gegen Zähler, Nenner gegen Nenner" (horizontal), nach der Ausführung wie bei der Multiplication kreuzweis gehoben. Hebt man vor der Ausführung der Division, so vergesse

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

man nicht den Divisor umzukehren, falls der Dividend ganz wegfallen (1 stehen bleiben) sollte.

Beispiel: $\frac{2abc}{5def} : \frac{6a^2b^2c^3}{10d^3e^2f^3} = 1 : \frac{3abc^2}{2d^2ef^2} = \frac{2d^2ef^2}{3abc^2}$.

8. Alle Divisionen können in Multiplicationen mit dem umgekehrten Werthe des Divisors verwandelt werden, was von besonderer Wichtigkeit ist und großen Nutzen für die Leichtigkeit und Sicherheit der Rechnung gewährt, wenn die umgekehrten Werthe für häufig vorkommende Divisoren ein für allemal berechnet und in Decimalbrüche verwandelt sind.

9. Die Sätze über die Vertauschung der Posten und Factoren, die zuerst nur für ganze Zahlen erwiesen waren, gelten ganz allgemein für alle uns bisher bekannt gewordenen Zahlformen. Welche Analogie findet zwischen den Sätzen des ersten und zweiten Abschnittes statt? Welche Hülfsmittel sind im Allgemeinen bei der Beweisführung angewandt? Welcher Grundsatz spielt bei diesen Beweisen die Hauptrolle?

§. 25.

Division durch einen mehrgliedrigen Ausdruck.

1. Bei der Ausführung von Divisionen mit mehrgliedrigen Ausdrücken hat man sich vor allen Dingen an die Grundaufgabe der Division, die in der Aufsuchung eines Factors zu einem gegebenen Producte besteht, zu erinnern, sowie an ihr Verhältniß zu einer vorangegangenen Multiplication, aus der das Product (Dividend) entstanden ist. Denn sonst könnte man leicht auf den Gedanken gerathen, die Division von zwei ganz willkürlich gebildeten mehrgliedrigen Ausdrücken ausführen zu wollen. Darum müssen mehrgliedrige Buchstabenausdrücke als Wiederholung des Frühern und zur Einleitung in das Folgende multiplicirt werden, um an ihnen auch noch folgende Begriffe, die für Geometrie und Algebra von der größten Wichtigkeit sind, zu erörtern.

Beispiele für Multiplicationen:

a. $(3a^2 - 5bd + cf)(-5a^2 + 4bd - 8cf)$.

b. $(4a^3b^2 - 5a^2b^2c + 8a^2bc^2 - 3a^2c^3 - 7abc^3)(2ab^2 - 4abc - 2bc^2 + c^3)$.

c. $(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$.

d. $(x^3 - x^2 + x - 1)(x + 1)$.

e. $(x^4 - x^3q + x^2q^2 - xq^3 + q^4)(x + q)$.

f. $(3x^3 - 2x^2 + x - 1)(5x^2 - 4x - 1)$.

2. In mehrgliedrigen Formeln nennt man jeden Buchstabenfactor eines Gliedes eine Dimension desselben und bestimmt den Grad oder die Dimension des ganzen Gliedes nach der Anzahl der Buchstabenfactoren oder der Summe ihrer Exponenten. Die Dimension eines gebrochenen Gliedes wird

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

durch den Unterschied der Exponenten im Zähler und Nenner bestimmt. Von welchem Grade oder welcher Dimension sind folgende Ausdrücke $2a^2bc^3$; $\frac{2}{3}\,xyz^2$; $\frac{4}{7}\,\frac{x^2y^3z^2}{tu}$; $1\frac{1}{2}\,\frac{m^2nq}{pq^2n}$.

3. Der Ausdruck Dimension stammt ursprünglich aus der algebraischen Auflösung geometrischer Aufgaben her. Denn bezeichnen $a, b, c,$ Linien, also Constructionen von einer Dimension, so ist ihr Product ab (das aus ihnen gebildete Rechteck) eine Fläche oder eine Construction von zwei Dimensionen, ebenso abc ihr Parallelopiped ein Körper oder eine Construction von drei Dimensionen. Die Algebra hat dann dem Ausdrucke eine viel weitere Bedeutung gegeben.

4. Ein Polynom heißt **homogen**, wenn alle Glieder dieselbe Dimension haben; gleichnamig (ähnlich) heißen in zwei oder mehr Polynomen diejenigen Glieder, welche aus denselben Buchstaben mit denselben Exponenten zusammengesetzt sind.

Beispiele: $3a^2bc - 5bcd^2 + \frac{2}{3}\frac{a^3bm^2}{op}$; $5a^2bc$ und $\frac{2}{3}\,a^2bc$ sind gleichnamige Glieder. Auf homogene Formeln trifft man besonders bei der algebraischen Auflösung geometrischer Aufgaben.

5. Für die Multiplication von Polynomen ergeben sich nach den früheren Sätzen leicht nachstehende Folgerungen.

a. Wenn beide Polynome homogene Formeln sind, so ist auch ihr Product eine homogene Formel.

b. Die Dimension jedes Gliedes im Producte zweier homogenen Formeln ist der Summe der Dimensionen zweier Glieder aus ihren Factoren gleich. Ein Satz, der dazu dienen kann, Fehler in einem Producte zu entdecken.

c. Wenn die beiden zu multiplicirenden Polynome nach steigenden oder fallenden Potenzen eines Buchstabens (Hauptgröße) geordnet sind, so kann das Product auf dieselbe Weise geordnet werden.

d. Wenn bei der Multiplication zweier Polynome keine Zusammenziehung gleichnamiger Glieder stattgefunden hat, so ist die Anzahl der Glieder im Producte dem Producte aus der Anzahl ihrer Glieder in den Factoren gleich.

e. Wenn gleichnamige Glieder zusammengezogen sind, so kann das Product weniger Glieder als die Factoren haben. (Beispiele aus den vorigen §§.)

f. Die Producte aus den beiden höchsten und niedrigsten Gliedern lassen sich nie zusammenziehen und bilden das höchste und niedrigste Glied des Productes.

6. Aus den oben angeführten Sätzen über die Multiplication ergeben

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

sich nun leicht die folgenden Regeln für die Ausführung der Divisionen mit Polynomen.

a. Man sondere eingliedrige gemeinschaftliche Factoren in Dividend und Divisor ab.

b. Ordne die Glieder in Dividend und Divisor auf dieselbe Weise entweder alphabetisch oder nach Potenzen einer Hauptgröße.

c. Dividire mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste des Dividenden, so ist der Quotient das erste Glied des gesuchten Quotienten.

d. Multiplicire den ganzen Divisor mit dem gefundenen Quotienten und subtrahire die Theilproducte von den gleichnamigen Theilproducten im Dividenden. (Hat man das Divisionsverfahren eingesehen und eingeübt, so gewöhne man sich wie bei dem Ziffernrechnen daran nicht die Subtrahenden sondern, gleich die Reste hinzuschreiben.

e. Kommen unter diesen Theilproducten irgend welche vor, die nicht im Dividenden vorhanden sind, so setzt man sie nach den Regeln der Subtraction mit entgegengesetzten Zeichen an die ihrem Range gebührende Stelle zum Reste.

f. Dividire hierauf mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Restes, multiplicire mit dem so gefundenen zweiten Gliede des Quotienten den ganzen Divisor und verfahre ganz so wie in d und e.

g. Auf dieselbe Weise bestimme man das dritte, vierte Glied des Quotienten u. s. w. bis sämmtliche Glieder des Dividenden in Rechnung gezogen sind. Geht die Rechnung auf oder bleiben keine Glieder als Rest stehen, so ist der Quotient vollständig gefunden und der Dividend ein Vielfaches des Divisors.

h. Bleibt jedoch ein Rest, so hänge man diesen dem Quotienten als Bruch mit dem Divisor als Nenner an, so daß wenn A den Dividenden, B den Divisor, C den Quotienten und $(A - BC)$ den Rest bedeutet, die allgemeine Form des Quotienten folgende Gestalt annimmt.

$$\frac{A}{B} = C + \frac{A - BC}{B} = C - \frac{BC + A}{B}.$$

7. In Bezug auf die Zeichen der einzelnen Glieder im Quotienten ergibt sich aus der Regel über die Zeichen der Glieder eines vielgliedrigen Productes leicht folgende analoge Regel für die Zeichen in einem mehrgliedrigen Quotienten: Gleiche Zeichen im Dividenden und Divisor geben im Quotienten (+) ungleiche dagegen (—).

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beweis: Denn da $+a \,.\, +b = +ab$ gibt, so gibt umgekehrt $\frac{+ab}{+a} = +b$ und nicht $-b$, da nur $(+a)\,.\,(+b)$ und nicht $(+a)\,.\,(-b)\;+ab$ geben kann. — Der Beweis in den andern 3 Fällen ist diesem ähnlich. —

8. Der Beweis für die in 6. und 7. aufgestellte allgemeine Divisionsregel liegt in dem Verfahren selbst und ergibt sich auf folgende Weise. Bezeichnet man wie in §. 4 den Dividenden, Divisor, Rest mit D, d, r und die einzelnen Quotienten mit q', q'', q''' u. s. w. und ist

$$\frac{D}{d} = q' + q'' + q''' \;.\;.\;.\;.\;. + \frac{r}{d},$$

so ist umgekehrt, wenn man auf beiden Seiten mit d multiplicirt, nothwendig

$$D = d\,(q' + q'' + q'' \;.\;.\;.\;.) + r.$$

9. Sind Dividend und Divisor mehrgliedrige Formeln und nach irgend einer gemeinschaftlichen Hauptgröße auf dieselbe Weise nach steigenden oder fallenden Potenzen geordnet, so kann man sie auch umgekehrt nach fallenden oder steigenden Potenzen derselben Hauptgröße ordnen. Der Quotient wird immer auf dieselbe Weise wie der Dividend und Divisor geordnet sein. Wie verhält sich das Verfahren bei der mehrzifferigen Zahlendivision zu diesem algebraischen Dividiren? Ist die eben angeführte Umstellung der Glieder auch auf die Umstellung der Ziffern anwendbar?

10. Kommen in den gegebenen Polynomen wie in den Beispielen 45 und 46 mehrere Glieder mit demselben Exponenten der Hauptgröße vor, so schließe man dieselben in Klammern und betrachte sie als vielgliedrige Coefficienten einer und derselben Potenz der Hauptgröße. Um die Division an solchen Formeln zu verrichten, ordne man die Coefficienten der einzelnen Glieder nach einem und demselben Buchstaben und vollziehe die Division an den Hauptgrößen uud den Coefficienten auf obige Weise. Besondere Aufmerksamkeit ist auf die Vorzeichen zu richten.

10. Ein leichter zu übersehendes und sicherer gegen Rechenfehler, besonders in Bezug auf die Zeichen, schützendes Verfahren ist folgendes, das in der Analysis bei der Reihenentwicklung gewöhnlich angewandt wird, und dessen Eigenthümlichkeit sich leicht aus dem ausgeführten Beispiele ergeben wird. Soll nämlich:

$$(6b - 10)\,a^4 - (7b^2 - 23b + 20)\,a^3 - (3b^3 - 22b^2 + 31b - 5)\,a^2 + (4b^3 - 9b^2 + 5b - 5)\,a + (b^2 - 2b),$$

durch $(3b - 5)\,a + (b^2 - 2b)$ dividirt werden, so führe man die Rechnung wie folgt:

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
6\,b & a^4 - 7\,b^2 & a^3 - 3\,b^3 & a^2 + 4\,b^3 & a + b^2 - 2\,b \\
-10 & +23\,b & +22\,b^2 & -9\,b^2 & \\
 & -20 & -31\,b & +5\,b & \\
 & & +5 & -5 & \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3\,a & a + b^2 - 2b \\
-5 & \\ \hline
\end{array}
\;
\begin{array}{r|r|l}
2\,a^3 - 3\,b & a^2 + 4\,b & a + 1 \\
+4 & -1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-9\,b^2 & a^3 \\
+27\,b & \\
-20 & \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
+12\,b^2 & a^2 \\
-23\,b & \\
+5 & \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
+3\,b & a + b^2 - 2\,b \\
-5 & \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

12. Enthält eine mehrgliedrige Formel im Dividenden einen oder mehrere Buchstabenfactoren in verschiedenen Potenzen, die im Divisor nicht vorkommen oder ist der Divisor, wie man sagt, unabhängig von diesen Buchstaben, so kann man statt der gewöhnlichen Anordnung nach den gemeinschaftlichen Buchstaben und statt des oben beschriebenen auch folgendes bequemere Verfahren anwenden:

Man ordnet den Dividenden nach Potenzen eines der nicht im Divisor vorkommenden Buchstaben, dividirt mit dem Divisor in die einzelnen Glieder (d. h. in ihre Coefficienten), so ist der Quotient dem Aggregate aus den Quotienten der einzelnen Glieder gleich. —

Beweis: Denn bezeichnet man die vielgliedrigen Coefficienten mit $A, B, C \ldots$, den Buchstaben, nach dem der Dividend geordnet ist, mit x und den von diesem Buchstaben unabhängigen vielgliedrigen Divisor mit D, so ist

$$\frac{A \cdot x^m + Bx^n + Cx^o \ldots + E}{D} = \frac{A}{D}x^m + \frac{B}{D}x^n + \frac{C}{D}x^o \ldots \frac{E}{D}.$$

Lassen sich nun die einzelnen Coefficienten durch D ohne Rest dividiren, so auch der ganze Ausdruck, und der Quotient ist dem Aggregate der einzelnen Quotienten gleich. Z. B.

$$\frac{(3\,a^2b^3 - 3\,abc^3 - 2\,b^3c^2 + b^5 - 3\,a^2bc^2 + 3\,ab^3c - a^2c^3 + bc^4 + a^2b^2c)}{b^2 - c^2}$$

$$= \frac{(3\,b^3 + b^2c - 3\,bc^2 - c^3)\,a^2 + (3\,b^3c - 3\,bc^3)\,a + (b^5 - 2\,b^3c^2 + bc^4)}{b^2 - c^2}$$

$$= \frac{3\,b^3 + b^2c - 3\,bc^2 - c^3}{b^2 - c^2}\,a^2 + \frac{3\,bc(b^2 - c^2)}{b^2 - c^2}\,a + b\,\frac{(b^4 - 2\,b^2c^2 + c^4)}{b^2 - c^2}$$

$$= (3\,b + c)\,a^2 + 3\,bca + b\,(b^2 - c^2)$$

13. Wie heißen die Quotienten von folgenden häufig vorkommenden Divisionen?

Digitale Bibliothek Braunschweig

1. $\frac{(a+b)^2}{a+b}$

2. $\frac{(a-b)^2}{a-b}$

3. $\frac{a^2-b^2}{a+b}$

4. $\frac{a^2-b^2}{a+b}$

5. $\frac{a^3-b^3}{a-b}$

6. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

7. $\frac{a^4-b^4}{a-b}$

8. $\frac{a^4-b^4}{a+b}$

9. $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$

10. $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$

11. $\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

12. $\frac{a^4-b^4}{a^3-a^2b+ab^2-b^2}$

14. Durch welche Ausdrücke lassen sich folgende Dividenden ohne Rest dividiren

$$a^6-b^6;\ m^{16}-n^{16};\ x^{19}+q^{19};\ x^n-q^n;\ x^{2n}-q^{2n}.$$

Uebersicht über die in Abschnitt I. und II. bis §. 25 aufgestellten Sätze und Regeln.

Bezeichnet man eine ganze Zahl mit *Z*, eine Summe mit *S*, eine Differenz mit *D*, ein Product mit *P*, einen Quotienten oder Bruch mit *Q*, so läßt sich aus nachstehender Tabelle, in der vollständig je zwei dieser Buchstaben verbunden sind, leicht übersehen, welche Verbindungen überhaupt vorkommen und für welche Regeln aufgestellt sind oder nicht

	Z	*S*	*D*	*P*	*Q*
Z	*ZZ*	*ZS*	*ZD*	*ZP*	*ZQ*
S	*SZ*	*SS*	*SD*	*SP*	*SQ*
D	*DZ*	*DS*	*DD*	*DP*	*DQ*
P	*PZ*	*PS*	*PD*	*PP*	*PQ*
Q	*QZ*	*QS*	*QD*	*QP*	*QQ*

Die Tabelle enthält im Ganzen 25 Verbindungen von je zwei Buchstaben. Sieht man den rechts stehenden Buchstaben als den an, mit dem operirt, und den links stehenden als den an, an dem operirt wird, so enthält jede Verbindung, je nachdem sie eine Addition, Subtraction, Multiplication oder Division bezeichnet, vier verschiedene Rechenverbindungen. Im Ganzen gibt es also 100 solcher Verbindungen von Zahlen mit Rechnungs-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

resultaten und von Resultaten mit Resultaten. Die Tabelle kann nun sehr passend dazu benutzt werden

a. den Schüler nachweisen zu lassen, in welcher Verbindung jeder einzelne Satz enthalten ist,

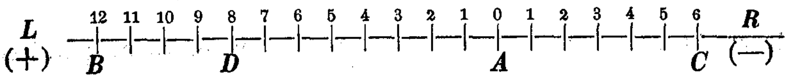
b. für welche Verbindungen bestimmte Regeln gegeben sind und in welchen §§. sie stehen,

c. für welche Verbindungen keine bestimmte Regeln gegeben sind und warum nicht. —

§. 26.

Von den algebraischen Zahlen (Richtungszahlen).

Vorbemerkung für den Lehrer. Um den Schüler selbst den Begriff und die Regeln des Rechnens mit algebraischen Zahlen finden zu lassen, verfahre der Lehrer etwa so. Er zeichne eine Linie an die Tafel, schneide von einem Punkte A aus auf beiden Seiten gleiche Strecken mehrere Male ab wie in unterstehender Figur



und lasse dann die nachstehenden oder ähnliche Fragen von den Schülern beantworten. Lehrer: Denkt euch unter der Linie, die ihr da gezeichnet sehet, eine Eisenbahn, unter den einzelnen abgeschnittenen Strecken geographische Meilen, in A, B, C Bahnhöfe mit Locomotiven, die von A nach links und rechts ausgefahren sind und beantwortet mir nun folgende Fragen: Wie weit ist B von A entfernt? Wie weit C von A? Wie weit B von C oder C von B? Und wie viele Meilen ist B von A weiter entfernt als C von A? Wie vielmal ist die Entfernung von AC in der von BC enthalten? Welcher Theil von BC ist AC? Wenn die Locomotive in B nun 4 Meilen der Richtung nach A zurückfährt, wie viele Meilen hat sie nun im Ganzen gemacht? Wie weit ist sie noch von A entfernt? Wie viele Meilen und in welcher Richtung muß sie von B aus machen um nach C zu kommen? Wie viele Meilen und in welcher Richtung muß die Locomotive in C machen um zu der in B zu gelangen? Wie viele Meilen und in welcher Richtung müssen beide Locomotiven einzeln zurücklegen um in A zusammen zu treffen? Wie vielmal so viele Meilen und in welcher Richtung muß C machen um in B anzukommen? Den wievielten Theil ihres Weges und in welcher Richtung brauchte die Locomotive B von A aus zurückzulegen um zu der in C zu gelangen? Wenn ihr nun die linke Seite die positive (+) und die rechte, die negative (—) Seite nennt, wie werdet ihr dann die obigen Fragen beantworten? Läßt sich der Lehrer nun die obigen oder ähnliche Fragen noch einmal mit den Wörtern positiv und negativ statt links und rechts beantworten, so wird das Ver-

Digitale Bibliothek Braunschweig

ständniß der folgenden Erklärungen und Sätze gewiß nicht die geringste Schwierigkeit finden.

---

1. Drücken die Zahlen nicht Art-, sondern Raum- und Zeitgrößen aus, die beide durch Strecken auf einer Linie versinnlicht werden können, so muß außer der Menge von Einheiten, bei sehr vielen Fragen, auch die Richtung angegeben werden, in der sie gezählt sind.

2. Zahlen, welche nur die Menge der Einheiten zählen ohne ihre Richtung zu berücksichtigen heißen **absolute** Zahlen; Zahlen dagegen, welche außer der Menge von Einheiten auch die Richtung angeben, in der sie gezählt sind, heißen **algebraische** Zahlen (Richtungszahlen). Algebraische Zahlen hat man sie deshalb genannt, weil man bei der allgemeinen Lösung algebraischer Aufgaben zuerst auf ihre Bedeutung und die Rechnung mit ihnen geführt ist. Richtungszahlen hat man sie in neuester Zeit deshalb mit Recht genannt, weil von ihnen nur dann die Rede sein kann, wo die Richtung und ein Richtungsgegensatz, wie schon beim Vor- und Rückwärtszählen, zum Vorschein kommt und ausgedrückt werden muß.

3. Algebraische Zahlen heißen **einstimmig**, wenn sie in derselben Richtung gezählte Einheiten ausdrücken; **widerstreitend** (oppositiv) dagegen, wenn sie in gerade entgegengesetzter Richtung gezählte Einheiten enthalten.

4. Widerstreitende Zahlen heißen **positive** (additive) Zahlen, wenn sie in ursprünglicher zuerst gewählter Richtung gezählte Einheiten bezeichnen, **negative** (subtractive) Zahlen dagegen, wenn sie in derjenigen Richtung gezählte Einheiten ausdrücken, welche der ursprünglichen Richtung entgegengesetzt ist.

5. Positive Zahlen werden mit $+$ negative mit $-$ bezeichnet. Steht kein Vorzeichen vor einer Zahl, so hat man sie in ursprünglicher Richtung gesetzt, also mit dem $+$ Zeichen zu denken. Eine mit Vorzeichen versehene Zahl heißt kleiner als eine andere, wenn zu der ersten eine positive Zahl addirt werden muß, damit man die andere erhält.

Beispiel: $-5 < -3$ weil $-5 + 2 = -3$
$-2 < 0$ „ $-2 + 2 = 0$
$-2 < +1$ „ $-2 + 3 = +1$ ist.

Die Benennung additiv und subtractiv, sowie die Bezeichnung $+$ und $-$ ist ebenfalls passend, wenn man den Begriff der algebraischen Zahlen aus der Subtraction ableitet.

6. Welche Richtung als die ursprüngliche positive angesehen werden soll, ist nach Willkür zu bestimmen; die ihr entgegengesetzte Richtung heißt dann aber mit Nothwendigkeit die negative Richtung. — Bei praktischen Fragen und Aufgaben sieht man natürlich diejenige Richtung als die positive an, welche einem bestimmten Ziele zuführt oder irgend einem Zwecke dienlich ist.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Warum bezeichnet man die Wärmegrade mit + die Kältegrade mit — und nicht umgekehrt? Warum bezeichnet man an Pegeln den Wasserstand über 0 mit + und den unter 0 mit (—)?

7. Beispiele von widerstreitenden Zahlen geben: in entgegengesetzter Richtung auf einer Eisenbahn gezählte Strecken, Zeitlängen vor und nach Christi Geburt, Wärme und Kältegrade des Thermometers, nördliche und südliche geographische Breite, westliche und östliche geographische Länge. Vermögen und Schulden, Guthaben und Inhaben beim Kegelspiel sind nur dann passend gewählte Beispiele, wenn man auch an ihnen den Gegensatz in der Zählung deutlich hervortreten läßt. An Ernte-Erträgen und andern Beispielen kann der Gegensatz der Richtung ebenfalls deutlich gemacht werden, wenn man von einem bestimmten mittleren Ernte-Ertrage als dem Null-Ertrage ausgeht und den Ueberschuß oder Mangel in entgegengesetzter Richtung von ihm auszählt.

8. Aus dem Begriffe der widerstreitenden Zahlen, der sich unmittelbar auf das Zählen in entgegengesetzter Richtung stützt, folgt, daß wenn widerstreitende Zahlen mit einander durch Zählen verbunden werden, die kleinere Zahl so viele Einheiten in der größern vernichtet als sie selbst enthält.

9. Algebraische Zahlen werden addirt

a. wenn sie einstimmig sind, indem man sie wie absolute Zahlen addirt und der Summe das Vorzeichen der Posten gibt.

Formel: $(\pm a) + (\pm b) = \pm (a + b)$.

b. Wenn sie widerstreitend sind, indem man die kleinere Zahl von der größern subtrahirt und dem Reste das Vorzeichen der größern gibt. Wenn $a > b$ so ist

Formel: $(\pm a) + (\mp b) = \pm (a - b)$.

Beweis: folgt unmittelbar aus 8.

10. Sollten mehrere Posten mit verschiedenen Vorzeichen addirt werden, so addire man erst die positiven, dann die negativen, ziehe die kleinere Summe von der größern ab und gebe dem Rest das Vorzeichen der größern.

11. Algebraische Zahlen werden subtrahirt,

indem man den umgekehrten Werth des Subtrahenden zum Minuenden nach 9 addirt. Wenn $a > b$, so ist

Formel: $(\pm a) - (\pm b) = (\pm a) + (\mp b) = \pm (a - b)$

$(\pm a) - (\mp b) = \pm a + (\pm b) = \pm (a + b)$.

Beweis: Denn addirt man auf beiden Seiten den Subtrahenden, so erhält man den Minuenden.

12. Null erhält man, wenn zu einer Zahl die ihr gleiche widerstreitende addirt oder von ihr die gleiche einstimmige subtrahirt wird.

Formel: $(\pm a) + (\mp) a = 0$

$(\pm a) - (\pm a) = 0$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

13. Algebraische Zahlen werden multiplicirt,

indem man sie wie absolute Zahlen multiplicirt und ihren Producten das $+$ oder $-$ Zeichen vorsetzt, je nachdem die Factoren gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Formel: $(\pm a) \cdot (\pm b) = \pm ab$
$(\pm a) \cdot (\mp b) = - ab.$

Beweis: Der Beweis wird in allen 4 Fällen auf dieselbe Weise aus dem Begriffe der Multiplication abgeleitet. Der Beweis für $- a \cdot - b = + ab$ würde so ungefähr lauten können. Nach dem Begriffe der Multiplication soll sich aus $(- a)$ das Product ebenso bilden, wie sich der Multiplicator $(- b)$ aus der Einheit gebildet hat. Da nun die Einheit b mal in entgegengesetzter Richtung in ihm gesetzt ist, so muß auch $(- a)$ b mal in entgegengesetzter Richtung, also in der Richtung $+ a$ gesetzt werden, was $+ ab$ gibt.

Beispiel: Hat ein Dampfwagen 4 Meilen nach Westen gemacht $(- 4)$ und ein anderer hat dreimal soviel Meilen in entgegengesetzter $(- 3)$ Richtung gemacht, so hat er ohne Zweifel 12 Meilen in östlicher $(+)$ Richtung gemacht.

14. Die Ordnung der Factoren ist auch hier willkürlich.

15. Sind mehr als zwei algebraische Factoren zu multipliciren, so hängt das Vorzeichen im Producte von der Anzahl der negativen Factoren ab. Eine gerade Anzahl negativer Factoren gibt ein positives, eine ungerade Anzahl dagegen ein negatives Product. Warum?

16. Ist ein Product negativ, z. B. $- ab$, so kann es ebenso gut aus $- a \cdot + b$ als aus $+ a \cdot - b$ entstanden sein. Alle drei Ausdrücke sind ihrem absoluten Werthe nach gleich und können für einander in so fern gesetzt werden.

17. Algebraische Zahlen werden dividirt,

indem man sie wie absolute Zahlen dividirt und dem Quotienten das $+$ Zeichen gibt, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, das $-$ Zeichen dagegen, wenn sie ungleiche Vorzeichen haben.

Formel: $(\pm a) : (\pm b) = + \frac{a}{b}$

$(\pm a) : (\mp b) = - \frac{a}{b}.$

Beweis: Derselbe wird in allen 4 Fällen auf dieselbe Weise aus dem Begriffe der Division abgeleitet. Etwa so: $- a : - b = + \frac{a}{b}$. Denn da der Quotient $\frac{a}{b}$ mit dem Divisor $(- b)$ multiplicirt den

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Dividenden ($-a$) zum Product geben soll, so kann derselbe nur $+\frac{a}{b}$ sein, da $-\frac{a}{b}\cdot(-b)$ nicht ($-a$) sondern ($+a$) geben würde.

18. Ein positiver Ausdruck $\frac{a}{b}$ kann ebenso gut aus $\frac{+a}{+b}$ als aus $\frac{-a}{-b}$ entstanden sein. Ebenso kann ein negativer Quotient $-\frac{a}{b}$ aus $\frac{-a}{+b}$ und aus $\frac{+a}{-b}$ entstanden sein. Alle drei Ausdrücke sind ihrem absoluten Werthe nach gleich und können in Bezug auf ihn für einander gesetzt werden.

19. Jede Zahl durch die ihr entgegengesetzte gleiche Zahl dividirt, gibt zum Quotienten -1.

$$+a : -a = -1;\ \frac{a-b}{b-a} = -1;\ \frac{7-4}{4-7} = -1.$$

Ein einfacher Satz, der in der Umformung und Vereinfachung algebraischer Ausdrücke viele Anwendung findet.

20. Jede Zahl, welche in 0 dividirt, gibt zum Quotienten 0.

Formel: $\frac{0}{a} = 0$. Denn $0 . a = 0$.

21. Jede Zahl durch 0 dividirt gibt zum Quotienten eine unendlich große Zahl (∞).

Formel: $\frac{a}{0} = \infty$.

Beweis: Denn setzt man $0 = a - a$ und dividirt nach den Regeln der Division, so erhält man $1 + 1 + 1 + \ldots$ ohne Ende fort. Oder: Läßt man den Divisor immer mehr abnehmen, so wird der Quotient immer größer. Da num die kleinste Zahl noch größer als 0 ist, so muß der Quotient, wenn man mit 0 dividirt, größer werden, als jede noch so große angebbare Zahl.

22. Jede Zahl durch eine unendlich große Zahl dividirt, gibt zum Quotienten 0.

Formel: $\frac{n}{\infty} = 0$.

Beweis: Denn setzt man nach 21 $\infty = \frac{n}{o}$ so ist $\frac{n}{\infty} = \frac{n}{\frac{n}{0}} = \frac{n \,.\, o}{n} = 0$. Oder ähnlich wie in 21 zu führen.

23. Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist ein ganz unbestimmter unbrauchbarer Ausdruck

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

und kann jede beliebige Zahl oder 0 oder ∞ sein, je nachdem der Ausdruck entstanden ist. Ein solcher Ausdruck entsteht z. B., wenn Divisor und Dividend einen gemeischaftlichen Factor enthalten, welcher unter irgend einer Voraussetzung zu Null wird, und der vorher gehoben sein mußte.

Beispiele: 1. Für $Z = a$ ist

$$\frac{a^2 - z^2}{2a^2 - az - z^2} = \frac{a}{0} = \frac{(a+z)(a-z)}{(2a+z)(a-z)} = \frac{a+z}{2a+z} = \frac{2}{3}.$$

2. Für $z = a$ ist

$$\frac{a^2 - 2az + z^2}{a^2 - z^2} = \frac{0}{0} = \frac{(a-z)(a-z)}{(a+z)(a-z)} = \frac{a-z}{a+z} = \frac{0}{a+z} = 0.$$

3. $z = \frac{1}{2} a$ ist

$$\frac{a^2 - az - 2z^2}{a^2 - 4az + 4z^2} = \frac{0}{0} = \frac{(a-2z)(a+z)}{(a-2z)(a-2z)} = \frac{a+z}{a-2z} = \infty.$$

Wie man den wahren Werth dieser und ähnlicher vieldeutiger Ausdrücke z. B. $\frac{\infty}{\infty}$; $a^0 . \infty$; 0^0; ∞^0; 1^∞ findet, zeigt die Differenzialrechnung.

24. Aus den Regeln über die Rechnung mit algebraischen Zahlen folgt, daß die Zeichen $+$ und $-$ eben so gut als Rechnungs- oder Verbindungszeichen, denn als Richtungszeichen, Richtungscoefficienten aufgefaßt werden können und daß die Regeln für die Auflösung von Klammern u. s. w. dadurch nicht geändert werden.

25. Der Verfasser hat den Begriff und die Eigenschaften der algebraischen Zahlen nicht aus dem Begriffe der Subtraction, sondern aus dem viel allgemeinern höhern Begriffe des Richtungsgegensatzes, der im Vor- und Rückwärtszählen zuerst auftritt, entwickelt, weil dadurch die ganze Darstellung sachgemäßer, reeller, anschaulicher, ja handgreiflicher wird.

B. Von der Theilbarkeit oder Messung der Zahlen.

§. 27.

Von der Theilbarkeit der Zahlen, den Kennzeichen der Theilbarkeit decadischer Zahlen und vom größten gemeinschaftlichen Maße.

Vorbemerkung. Wenn in diesem §. von Zahlen die Rede ist, so sollen darunter immer ganze Zahlen verstanden werden. Wenn eine Zahl (m) eine andere (n) ohne Rest theilt, so soll dies nach dem Vorgange von T. Müller mit der Formel $\frac{a}{m} \backsim Z$ bezeichnet werden.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

1. Jede Zahl, welche eine andere ohne Rest dividirt, theilt, heißt ein Divisor (Maß, Theiler) derselben; jede Zahl dagegen heißt in Bezug auf ihren Divisor, sein Dividend (Vielfaches, Dividuus). Eine Zahl, die mehrere Zahlen ohne Rest zugleich theilt, heißt ihr gemeinschaftlicher Divisor (gemeinschaftliches Maß) und umgekehrt eine Zahl, die durch mehrere Zahlen ohne Rest getheilt wird, heißt in Bezug auf sie ihr gemeinschaftlicher Dividend (Generalnenner). Was versteht man unter größtem Maße und kleinsten Generalnenner? Welche Grenzen dürfen das größte gemeinschaftliche Maß und der kleinste Generalnenner zu mehreren Zahlen nie überschreiten?

2. Wenn eine Zahl eine andere ohne Rest theilt, so theilt sie auch deren Vielfaches ohne Rest.

Formel: Wenn $\frac{a}{b} \infty Z$

so ist $\frac{am}{b} \infty Z.$

Beweis: Denn nach §. 21 ist $\frac{am}{b} = \frac{a}{b} m$. Da nun $\frac{a}{b} . m \infty Z$

so ist auch $\frac{am}{b} \infty Z.$

3. Wenn eine Zahl zwei oder mehrere ohne Rest theilt, so theilt sie auch deren Polynom ohne Rest.

Formel: Wenn $\frac{a}{m} \infty Z; \frac{b}{m} \infty Z; \frac{c}{m} \infty Z$

so ist $\frac{a \pm b \pm c}{m} \infty Z.$

Beweis: Denn nach §. 19 ist $\frac{a \pm b \pm c}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \pm \frac{c}{m}$. Da nun $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \pm \frac{c}{m} \infty Z$, so ist auch $\frac{a \pm b \pm c}{m} \infty Z.$

4. Wenn Divisor und Dividend ein gemeinschaftliches Maß haben, so hat dasselbe auch der Rest.

Formel: Wenn $\frac{D}{m} \infty Z$ und $\frac{d}{m} \infty Z$

so ist $\frac{r}{m} \infty Z.$

Beweis: Denn da (nach 2 und 3) $\frac{D - dq}{m} \infty Z$ und $D - dq = r$ (§. 4) so ist $\frac{r}{m} \infty Z.$

5. Wenn Divisor und Rest ein gemeinschaftliches Maß haben, so hat dasselbe auch der Dividend.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Formel: Wenn $\frac{d}{m} \infty Z$ und $\frac{r}{m} \infty Z$

so ist auch $\frac{D}{m} \infty Z$.

Beweis: Denn da $D = dq + r$ (§. 4) und $\frac{dq+r}{m} \infty Z$ (2, 3),

so ist auch $\frac{D}{m} \infty Z$.

Warum gibt es keine ähnlichen Sätze für Divisor, Rest und Quotient oder Dividend?

6. Jede Zahl, die außer sich selbst und 1 keinen Theiler hat, heißt eine Primzahl (n. primus), im Gegensatz zu den zusammengesetzten Zahlen (n. compositus), die auch andere Theiler haben. Wenn von Theilern einer Zahl schlechthin die Rede ist, so sollen immer nur jene andern Theiler außer 1 und der Zahl gemeint sein. Beispiele.

7. Zwei Zahlen, die außer 1 kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen relative Primzahlen. Beispiele 3 und 7, 14 und 15.

8. Wenn eine Zahl einen Theiler hat, so hat sie in dem Quotienten auch noch einen zweiten Theiler.

9. Jede Zahl ist ein Product von einer bestimmten Anzahl unveränderlicher Primzahlen (Primfactoren).

Beweis: Daß jede Zahl ein Product von Primzahlen ist, läßt sich so beweisen: Denn wenn die Zahl eine Primzahl ist, so ist die Behauptung unmittelbar klar. Wenn sie aber eine zusammengesetzte Zahl ist, also (wenigstens zwei) Theiler hat, so kann man an ihren Theilern dieselben Voraussetzungen so lange machen, bis man zu Factoren kommt, die sämmtlich Primzahlen sind. Daß aber weder die Anzahl der Factoren, noch diese selbst verändert werden können, ohne zugleich die Zahl mit zu verändern, läßt sich so leicht indirect in jedem bestimmten Falle beweisen, daß der allgemeine aber schwierigere Beweis dafür ohne Nachtheil für das Folgende übergangen werden kann. — Aus diesem Satze ergeben sich aber leicht die folgenden.

10. Das Product zweier oder mehrerer Primzahlen ist gegen jede von ihnen verschiedene Primzahl eine Primzahl.

11. Wenn eine Zahl durch zwei absolute oder relative Primzahlen theilbar ist, so ist sie auch durch ihr Product theilbar.

12. Wenn in einem Quotienten oder Bruche Zähler und Nenner Primzahlen gegen einander sind, so sind auch beliebige Potenzen von Zähler und Nenner gegen einander Primzahlen.

Kennzeichen der Theilbarkeit.

13. Jede decadische Zahl ist durch 2 oder 5 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 2 oder 5 theilbar.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beweis: Jede mehrziffrige decadische Zahl (z. B. 3265) läßt sich in zwei Posten zerlegen, von denen der eine Posten die letzte Ziffer (5) enthält, der andere Posten aber die übrigen Ziffern (3260). Wenn nun der erste Posten sich durch 5 oder 2 dividiren läßt, so muß sich auch die ganze Zahl dadurch dividiren lassen, da der zweite Posten als ein Vielfaches von 10 immer durch 2 oder 5 dividirt werden kann (2).

14. Jede decadische Zahl ist durch 4 oder 25 theilbar, wenn ihre beiden letzten Ziffern durch 4 oder 25 theilbar sind. Der Beweis ist dem in 13 ähnlich.

15. Jede decadische Zahl ist durch 8 oder 125 theilbar, wenn ihre drei letzten Ziffern durch 8 oder 125 theilbar sind. Der Beweis ist dem in 13 ähnlich.

Fragen: Wie würden die Kennzeichen für die Theilbarkeit von 16 und 625 lauten? Wie wird das Kennzeichen der Theilbarkeit für 2 und 5 gewöhnlich angegeben? Welche Zahlen sind durch 10 theilbar? Wenn eine Zahl nicht durch 2, 4, 5, 8, 10, 25, 125 theilbar ist, wie lassen sich nach 13, 14, 15 ihre Reste auf eine leichte Weise bestimmen?

16. Quersumme einer mehrziffrigen Zahl nennt man die Summe ihrer einzelnen Ziffern, ohne auf ihren Stellenwerth Rücksicht zu nehmen. So ist z. B. die Quersumme von $35046 = 3 + 5 + 0 + 4 + 6 = 18$.

17. Eine Zahl ist durch 3 oder 9 theilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 oder 9 theilbar ist. —

Beweis: Denn jede Zahl wie 3246 läßt sich in zwei Posten zerlegen, von denen der eine die Quersumme der Zahl enthält, der andere den Rest aus Zahl und Quersumme. Da nun der eine Posten als ein Vielfaches von 9 immer durch 3 und 9 theilbar ist, so ist die ganze Zahl (nach 3) durch 3 oder 9 theilbar, wenn der andere Posten oder die Quersumme durch 3 oder 9 theilbar ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
3246 &= 3000 + 200 + 40 + 6 \\
&= 3 . 1000 + 2 . 100 + 4 . 10 + 6 \\
&= 3 (999 + 1) + 2 (99 + 1) + 4 (9 + 1) + 6 \\
&= 3 . 999 + 3 + 2 . 99 + 2 + 4 . 9 + 4 + 6 \\
&= 3 . 999 + 2 . 99 + 4 . 9 + 3 + 2 + 4 + 6 \\
&= 3 . 999 + 2 . 99 + 4 . 9 + 18.
\end{aligned}$$

Wie bestimmt man den Rest, wenn sich eine Zahl nicht durch 3 oder 9 theilen läßt? Welche Zahlen lassen sich durch 6, 12, 14, 15 theilen? Läßt sich eine Zahl auch durch 12 theilen, wenn sie sich durch 2 und 6 theilen läßt? Wie würde das Kennzeichen für die Theilbarkeit mit 11 lauten? Warum ist es hier wohl fortgelassen? Gibt es auch Kennzeichen für andere Zahlen, z. B. 7, 13, 37 u. s. w. und warum sind sie fortgelassen?

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

18. Ein Product zweier oder mehrerer Zahlen läßt bei der Division mit 9 denselben Rest, den das Product der Reste aus ihren Factoren läßt.

Beweis: Denn bezeichnet man die Quersumme einer Zahl mit q und den Rest aus ihr und der Quersumme der ein Vielfaches von 9 ist, mit v, so ist, wenn a und b die beiden Factoren sind, und $a = v + q$ und $b = v^1 + q^1$ ist $ab = vv^1 + qv^1 + q^1v + qq^1$. Da nun die drei ersten Posten durch q theilbar sind, so ist der Rest des Productes gleich dem Reste aus dem letzten Posten qq^1. —

Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes.

19. Soll zu zwei Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß gesucht werden, so betrachte man beide als Dividend und Divisor (4), und dividire mit der kleineren in die größere. Geht die Division auf, so ist die kleinere Zahl selbst das größte Maß. Geht die Division jedoch nicht auf, so dividire man mit dem Reste in die kleinere Zahl, darauf mit dem zweiten Rest in den ersten Rest u. s. w., bis die Division aufgeht. Der Rest, mit dem die Division aufgeht, oder der letzte Divisor, ist das gesuchte Maß.

Beweis: Denn daß der letzte Divisor ein Maß der beiden gegebenen Zahlen sein muß, folgt ganz einfach aus der wiederholten Anwendung von 4 in der Auflösung, daß aber dies Maß das größte ist, folgt daraus, daß kein gemeinschaftliches Maß zweier Zahlen größer als die kleinste Zahl sein darf.

20. Das in 19 gelehrte allgemeine Verfahren, das oft sehr weitläufig werden kann, läßt sich noch durch folgende Hülfsmittel abkürzen.

a. Entdeckt man durch Anwendung der Kennzeichen über die Theilbarkeit der Zahlen kleinere gemeinschaftliche Theiler, so dividire man die Zahlen durch dieselben.

b. Hat die eine der gegebenen Zahlen Theiler, welche die andere nicht hat, so dividire man dieselbe durch ihre Theiler.

c. Durch Anwendung von a und b bringe man die gegebenen Zahlen auf kleinere Zahlen und falls dieselben noch keine Primzahlen sind, wende man auf sie das in 19 gelehrte allgemeine Verfahren an.

d. Am Schlusse der Rechnung aber vergesse man nicht den durch das allgemeine Verfahren gefundenen Theiler mit den gemeinschaftlichen nach a gefundenen Theilern zu multipliciren, um den größten Theiler zu finden.

Beweis: Der Grund für dies Verfahren liegt einmal darin, daß einseitige Theiler einer Zahl nicht zu dem gemeinschaftlichen Maß beitragen können und zweitens darin, daß wenn das größte Maß keine Primzahl, sondern eine zusammengesetzte Zahl ist, man dasselbe auch durch Aufsuchung seiner Factoren finden kann.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiel: Soll zu 102240 und 322056 das größte Maß gesucht werden, so erhält man durch Division mit 3, 34080 und 107352 und 3 als gemeinschaftliches Maß. Ferner durch Division mit 8 4260 und 13419 und 8 als gemeinschaftliches Maß. Dividirt man nun die erste Zahl mit 5 und die zweite mit 9, so erhält man

852 und 1491.

Dividirt man die erste Zahl mit 4 und die zweite mit 7, so erhält man

213 und 213.

Daher ist 213 . 3 . 8 das größte gemeinschaftliche Maß.

21. Zu drei oder mehr Zahlen findet man das größte gemeinschaftliche Maß durch wiederholte Anwendung von 20 oder 19 und 20. Man sucht zuerst zu zwei Zahlen, hierauf zu dem gefundenen Maße und der dritten Zahl, dann zu dem zweiten gefundenen Maß und der vierten Zahl u. s. w. das größte Maß. —

22. Zu eingliedrigen Buchstabenausdrücken ist das größte gemeinschaftliche Maß das Product des größten gemeinschaftlichen Maßes ihrer Coefficienten und ihrer einzelnen Buchstabenfactoren. So ist z. B. zu $24\,a^2\,b^5\,c^3$ und $56\,a\,b^3\,c$ das größte gemeinschaftliche Maß $8\,ab^2\,c$.

23. Zu zwei Polynomen findet man das größte gemeinschaftliche Maß durch ein ähnliches Verfahren wie in 20.

a. Zuerst untersuche man, ob die Formeln keine eingliedrigen, gemeinschaftlichen oder einseitigen Theiler haben.

b. Hierauf ordne man beide Polynome nach derselben Hauptgröße und dividire mit der niedrigen Formel in die höhere. Mit dem etwa bleibenden Reste dividire man in die Divisorformel, nachdem man in ihm wie vor der ersten Division die allen Gliedern gemeinschaftlichen Factoren unterdrückt hat, wie in 19, bis die Division aufgeht, oder man zu einem Reste gelangt, der von der Hauptgröße unabhängig ist. Um aber bei diesen Divisionen keine gebrochenen Glieder zu erhalten, ist es öfter nothwendig, Dividend oder Divisor oder beide zugleich mit kleinen nicht gemeinschaftlichen Theilern zu multipliciren, um die Division möglich zu machen. Das ganze Verfahren wird sich in folgenden Beispielen deutlich herausstellen, bedarf aber vielfacher Uebung und einer gewissen Fertigkeit in der raschen Erkennung zweigliedriger Factoren.

Beispiel 1: Soll zu $20\,x^5 + 21\,x^3 - 10\,x^2 + 4\,x - 8$ und zu $15\,x^4 + 7\,x^2 - 4$ das größte Maß gesucht werden, so sieht man leicht, daß $15\,x^4 + 7\,x^2 - 4 = (5\,x^2 + 4)\,(3\,x^2 - 1)$. Da sich nun beide Formeln nicht weiter zerlegen lassen, also Primformeln sind, so ist der Divisor $5\,x^2 + 4$ das größte Maß, nachdem man auch mit $3\,x^2 - 1$ die Division, aber vergeblich, versucht hat. —

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiel 2: Sind die gegebenen Formeln:
$qnp^3+3np^2q^2-2npq^3-3nq^4$ und $2mp^2q^2-4mp^4-mp^3q+3mpq^3$
so sondre man zuerst die eingliedrigen, einseitigen oder gemeinschaftlichen Factoren ab, um
$nq(p^3+3p^2q-2pq^2-3q^3)$ und $mp(2pq^2-4p^3-p^2q+3q^3)$
zu erhalten. Unterdrückt man nun die Factoren nq und mp und ordnet nach p, so erhält man
$$p^3+3p^2q-2pq^2-3q^3 \text{ und } -4p^3-p^2q+2pq^2+3q^3.$$
Dividirt man mit der linken Formel in die rechte, so erhält man als ersten Rest $11p^2q-6pq^2-5q^3$. Sondert man in ihm den Factor q ab, so erhält man als neuen Divisor $11p^2-6pq-5q^2$ und nach Multiplication des vorigen Divisors mit 11 als neuen Dividend $11p^3+33p^2q-22pq^2-22q^3$. Der zweite Rest ist $39p^2q-17pq^2-22q^3$. Unterdrückt man in ihm den Factor q und multiplicirt ihn, um die Division möglich zu machen, mit 11, so erhält man als neuen Dividend $429p^2-187pq-242q^2$ und als dritten Rest $47pq-47q^2$. Sondert man in ihm endlich den gemeinschaftlichen Factor $47q$ ab und dividirt mit $p-q$ in $11p^2-6pq-5q^2$, so erhält man in ihm, da die Division ohne Rest aufgeht, das größte gemeinschaftliche Maß. —

Beispiel 3: Zu $36a^6-18a^5-27a^4+9a^3$ und $27a^5b^2-18a^4b^2-9a^3b^2$ findet man auf ähnliche Weise $9a^3(a-1)$ als größtes gemeinschaftliches Maß.

§. 28.

Zerlegung der Zahlen und Buchstabenausdrücke in Factoren und Aufsuchung des kleinsten Generalnenners zu Zahlen und Buchstabenausdrücken.

1. Zerlegung einer Zahl in ihre Primfactoren. Soll eine Zahl in ihre Primfactoren zerlegt, oder soll sie als ein Product ihrer Primfactoren dargestellt werden, so dividire man sie mit Benutzung der Kennzeichen über die Theilbarkeit mit den auf einander folgenden Primzahlen, und zwar mit jeder einzelnen so lange es angeht, bis man zu einer Primzahl kommt, deren Quadrat größer als die gegebene Zahl ist oder bis man einen Quotienten erhält, der kleiner ist als sein Divisor. Wird die gegebene Zahl durch keine der Primzahlen ohne Rest dividirt, so ist sie eine absolute Primzahl. Wird sie dagegen durch eine oder mehrere Primzahlen ein oder mehreremale ohne Rest dividirt, so erscheint sie als ein Product von Potenzen dieser Primzahlen, deren Exponenten durch die Anzahl der keine Reste lassenden Divisionen bestimmt sind. Der Beweis liegt unmittelbar in dem Verfahren selbst. Die Grenze, bis zu der man die Primzahlen als Divisoren zu ver-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

suchen hat, ergibt sich ganz einfach aus der Bemerkung, daß jede Zahl als Product aus zwei Factoren betrachtet werden kann, die entweder gleich oder ungleich sein können. Sind sie gleich, so erscheint die Zahl als ihr Quadrat; sind sie ungleich, so ist der eine Factor kleiner, der andere größer als die Wurzel, den größern Factor findet man nothwendiger Weise als Quotienten des kleineren mit.

Bei der Division kann man auch gleich mehrere Primfactoren zusammenfassen und mit ihren Potenzen dividiren. Am einfachsten wird die Rechnung sich etwa so aufstellen lassen. Soll 10378368 in seine Primfactoren zerlegt werden, so hat man

10378368	: 8
1297296	: 8
162162	: 2
81081	: 9
9009	: 9
1001	: 7
143	: 11
13	

$$10378368 = 2^7 \,.\, 3^4 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13.$$

Tafeln, in denen die Primfactoren sämmtlicher Zahlen bis zu einer bestimmten Grenze angegeben sind, heißen Factorentafeln; sie leisten bei vielen Aufgaben wichtige Dienste.

2. Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes. Die Zerlegung der Zahlen in Primfactoren gibt ein bequemes Mittel an die Hand, zu mehr als 2 Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen, indem man jede Zahl in ihre Primfactoren zerlegt und in dem gemeinschaftlichen Maße jeden Factor setzt, der in allen Zahlen vorkommt und zwar mit dem niedrigsten Exponenten.

3. Aufsuchung sämmtlicher Factoren einer Zahl. Soll man sämmtliche Factoren einer Zahl darstellen, so suche man zuerst ihre Primfactoren auf, bilde aus ihnen alle Producte zu zwei, drei u. s. w. Factoren, in denen jeder Primfactor so oft vorkommen darf, als sein Exponent anzeigt, bis man zu einem Producte kommt, das aus sämmtlichen Factoren gebildet ist, d. h. zu der Zahl selbst. Der Beweis für dies Verfahren liegt in 9 §. 27.

Beispiel: Wenn $N = a^2 \,.\, b^3 \,.\, c$, so sind sämmtliche Factoren

$$\overset{1}{}$$

$$a,\ b,\ c$$
$$a^2,\ ab,\ ac,\ b^2,\ bc$$
$$a^2b,\ a^2c,\ ab^2,\ abc,\ b^3,\ b^2c,$$
$$a^2b^2,\ a^2bc,\ ab^3,\ ab^2c,\ b^3c$$
$$a^2b^3,\ a^2b^2c,\ ab^3c$$
$$a^2b^3c.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

4. Die Anzahl aller möglichen Theiler einer Zahl zu bestimmen. Ist $N = a^m \,.\, b^n \,.\, c^o$, worin a, b, c ihre Primfactoren bezeichnen, so ist die Anzahl ihrer Theiler $= (m+1)\,(n+1)\,(o+1.)$ Wie lautet die Regel in Worten?

Beweis:

1. Da N durch a^m theilbar ist, so ist es nicht nur theilbar durch $1, a, a^2, a^3 \ldots a^m$
2. „ N „ b^n „ „ „ „ „ „ „ „ „ $1, b, b^2, b^3 \ldots b^n$
3. „ N „ c^o „ „ „ „ „ „ „ „ „ $1, c, c^2, c^3 \ldots c^o$

sondern auch durch alle nur möglichen Producte, die aus den Gliedern dieser Reihen gebildet werden können. Da nun drei Reihen $(m+1)$, $(n+1)$, $(o+1)$ Glieder enthalten, so erhält man im Ganzen $(m+1)\,.\,(n+1)\,.\,(o+1)$ verschiedene Theilproducte (§. 16), welche Zahl zugleich die Anzahl der sämmtlichen Theiler bestimmt.

Wie viele Theiler haben 10, 12, 24, 30, 60, 360? Wie groß ist die Anzahl, wenn 1 und die Zahl selbst nicht mitgezählt wird?

5. Zu gegebenen Zahlen den kleinsten Generalnenner zu suchen. Soll zu mehreren Zahlen der kleinste gemeinschaftliche Dividend oder Generalnenner gesucht werden, so zerlege man sämmtliche Zahlen in ihre Primfactoren, und bilde aus ihnen ein Product, in dem jeder Primfactor mit seinem höchsten Exponenten vorkommt, so ist dasselbe der gesuchte Nenner.

Beweis: Daß dies Product ein gemeinschaftlicher Dividend ist, ist an sich klar, da in ihm alle Factoren jeder einzelnen Zahl enthalten sind; daß dies Product aber zugleich auch der kleinste gemeinschaftliche Dividend ist, folgt ganz einfach aus der Bemerkung, daß in ihm weder ein Factor fehlen, noch ein Exponent erniedrigt werden darf, wenn alle gegebenen Zahlen ohne Rest in ihn dividiren sollen.

Beispiel: Ist
$$\begin{aligned} 20 &= 2^2 \,.\, 5 \\ 24 &= 2^3 \,.\, 3 \\ 30 &= 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \\ 36 &= 2^2 \,.\, 3^2 \\ 40 &= 2^3 \,.\, 5 \\ 48 &= 2^4 \,.\, 3 \end{aligned}$$

so ist der Generalnenner $= 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5.$

Gewöhnliches Verfahren:

In den Rechenstunden gibt man gewöhnlich folgende Regel:

1. Schreibe die gegebenen Zahlen in eine Reihe.
2. Streiche diejenigen Zahlen, die in andere ohne Rest dividiren.
3. Theile die stehen bleibenden durch gemeinschaftliche Primfactoren so lange, bis nur relative Primzahlen stehen bleiben.

Dann ist das Product aus den Divisoren und den zuletzt stehen bleibenden Zahlen der kleinste Generalnenner.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Beispiel: ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~,

	12,	14,	16,	18,	20
2	6	7	8	9	10
2		7	4	9	5

Generalnenner $2 . 2 . 7 . 4 . 9 . 5 = 2^4 . 3^2 . 5 . 7.$

Ist dies Verfahren wesentlich von dem zuerst gelehrten, streng wissenschaftlichen Verfahren verschieden? Worin besteht die Abkürzung? Wie kann man mit Hülfe des größten Maßes zu zwei Zahlen den kleinsten Generalnenner finden? Wie verfährt man bei der Addition und Subtraction von Brüchen mit verschiedenen Nennern und welches praktische Verfahren wenden die Rechner bei der Aufstellung der Rechnung an? Welche Brüche lassen sich auf diese Weise am schwersten addiren oder subtrahiren? In was für Brüche wird man diese zu verwandeln suchen?

Zerlegung algebraischer Ausdrücke in ihre Primfactoren.

6. Sowie man von einfachen und zusammengesetzten Zahlen spricht, ebenso spricht man auch von einfachen und zusammengesetzten Buchstabenausdrücken oder Formeln. Eine Formel heißt ebenfalls einfach, wenn sie außer 1 und sich selbst keine andere Formel zum Theiler hat.

7. In jedem eingliedrigen Buchstabenausdrucke geben die einzelnen Buchstabenausdrücke mit ihren Exponenten die Primfactoren unmittelbar an.

Beispiel: $12 a^3 (b+c)^2 d^4$ enthält die Primfactoren $2^2, 3, a^3, (b+c)^2 d^4$

8. Soll eine mehrgliedrige Formel zerlegt werden, so sondert man zuerst die allen Gliedern gemeinsamen Factoren ab.

9. Die Zerlegung der auf den kleinsten Ausdruck gebrachten mehrgliedrigen Formeln ist eine Aufgabe, deren allgemeine Lösung die Kenntniß der Algebra und Analysis fordert und die deshalb an dieser Stelle nicht gegeben werden kann. Die Zerfällung zwei-, drei-, vier-, fünfgliedriger Formen ist jedoch für die Lösung algebraischer und geometrischer Aufgaben von vielfachem Nutzen und für ihre Zerfällung lassen sich folgende einfache Gesetze und Regeln aufstellen.

a. Die Summe zweier Buchstabenausdrücke z. B. $a^2 + b^2$ ist immer eine Primformel.

b. Die Differenz zweier Quadrate ist dem Producte aus Summe und Differenz der Wurzeln gleich.

Formel: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$

c. Die Differenz zweier gleich hohen Potenzen ist ein Product aus der Differenz ihrer Wurzeln und dem homogenen Polynom der nächst niedrigen Potenz ohne Coefficienten und — Zeichen.

Formel: $a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + a b^4 + b^4).$

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beweis für diesen Satz und den folgenden wird in der Lehre von den Potenzen gegeben werden.

d. Jede Differenz zweier gleich hohen geraden Potenzen ist ein Product aus der Summe ihrer Wurzeln und dem homogenen Polynom der nächstniedrigen Potenz ohne Coefficienten und mit abwechselnden Vorzeichen.

Formel: $a^4 - b^4 = (a+b)(a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3)$.

e. Jede Summe zweier gleich hohen ungeraden Potenzen ist ein Product aus der Summe ihrer Wurzeln und dem homogenen Polynom der nächstniedrigen Potenz ohne Coefficienten und mit abwechselnden Vorzeichen.

Formel: $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4)$.

f. Die Summe zweier gleich hohen geraden Potenzen ist eine Primformel.

Diese eben aufgestellten Sätze gelten auch noch, 1. wenn der Exponent der einen Potenz ein Vielfaches von dem Exponenten der andern Potenz ist, z. B. $m^5 - n^{10} = (m - n^2)(-)$; $m^{21} + n^7 = (m^3 + n)(-)$; $m^6 - n^{24} = (m \mp n^4)(-)$.

2. wenn beide Exponenten ein gemeinschaftliches Maß haben, z. B.
$m^{15} - n^{20} = (m^3 - n^4)(-)$; $m^{15} + n^{25} = (m^3 + n^5)(-)$.

Bei der Zerlegung zweier Summen oder Differenzen müssen die Exponenten jedoch so beschaffen sein, daß die Quotienten der Exponenten durch das gemeinschaftliche Maß ungerade oder gerade Zahlen sind, wenn man die Summe der Wurzeln als einen Factor haben will. $m^{16} - n^{24} = (m^2 + n^3)(-)$.

g. Jeder dreigliedrige Ausdruck worin $a > b$ von der Form:

1. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
2. $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
3. $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$
4. $x^2 + (a-b)x - ab = (x+a)(x-b)$
5. $x^2 - (a-b)x - ab = (x-a)(x+b)$ ist ein Product von den rechtsstehenden Factoren.

Wie lauten diese Sätze in Worten? Woraus besteht in den letzten vier Formen das dritte Glied? Woraus der Coefficient des zweiten Gliedes? Wie verfährt man demnach, um aus solchen Formeln die Factoren zu finden?

h. Oft ist es vortheilhaft, zu dem gegebenen Ausdruck einen andern passenden Ausdruck zugleich zu addiren und zu subtrahiren.

Beispiel: $3xy - 9y^2 + 3y + 20x^2 + 4x$
$= 3xy + 12xy - 9y^2 + 3y + 20x^2 - 12xy + 4x.$
$= 3y(5x - 3y + 1) + 4x(5x - 3y + 1)$
$= (5x - 3y + 1)(3y + 4x).$

i. Oft ist es dienlich, irgend einen Bestandtheil der gegebenen Formel in zwei Stücke zu zerlegen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiel: $3a^2 + 4ab + b^2 = 3a^2 + 3ab + ab + b^2$
$$= 3a(a+b) + b(a+b).$$
$$= (3a+b)(a+b).$$
$$12x^2 + 13xy^3 - 4y^6 = 12x^2 - 3xy^3 + 16xy^3 - 4y^6$$
$$= 3x(4x - y^3) + 4y^3(4x - y^3)$$
$$= (3x + 4y^3)(4x - y^3).$$

k. Oft findet sich in einigen Gliedern ein gemeinsamer Factor, der in den übrigen Gliedern nicht vorhanden ist. Sondert man diesen ab, so findet man häufig die Factoren unmittelbar

1. $3mx^3 + b^2x^2 - 3c^2mx - b^2c^2 = x^2(3mx + b^2) - c^2(3mx + b^2)$
$$= (x^2 - c^2)(3mx + b^2) = (x+c)(x-c)(3mx + b^2).$$

2. $3a^4 + 3a^2b^2 - 12a^2 - 6b^4 + 12b^2)$
$$= 3(a^4 + a^2b^2 - 4a^2 - 2b^4 + 4b^2)$$
$$= 3\left((a^4 + a^2b^2 - 2b^4) - 4(a^2 - b^2)\right)$$
$$= 3\left((a^2 + 2b^2)(a^2 - b^2) - 4(a^2 - b^2)\right)$$
$$= 3(a^2 + 2b - 4)(a^2 - b^2) = 3.(a^2 + 2b - 4)(a+b)(a-b).$$

10. Die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes und des kleinsten Generalnenners durch Zerlegung in Primfactoren, ferner die Darstellung aller Factoren und die Bestimmung ihrer Anzahl ist den für die Zahlen aufgestellten Regeln ganz analog und bedarf darum keiner besonderen Auseinandersetzung. —

C. Decimalbrüche.

§. 29.

Begriff eines Decimalbruches. Rechnung mit vollständigen Decimalbrüchen.

1. Decimalbruch heißt jeder Bruch, der eine höhere Einheit unseres Zahlensystemes, eine Potenz von 10, zum Nenner hat.

2. Decimalbrüche werden wie ganze decadische Zahlen geschrieben, nicht wie gemeine Brüche; der Nenner wird durch die Stelle des Zählers bestimmt. Setzt man in einer decadischen Zahl hinter die letzte Ziffer rechter Hand ein Komma (Decimalkomma) so bezeichnet die erste Stelle rechts von ihr Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel u. s. w.

Beispiel: 364,40763.

Setzt man über die einzelnen Ziffern wie in beistehender Zahl $\overset{+2}{3}\,\overset{+1}{6}\,\overset{+0}{4},\overset{-1}{4}\,\overset{-2}{0}\,\overset{-3}{7}\,\overset{-4}{6}\,\overset{-5}{3}$ kleinere Ziffern, so heißen diese Stellenzahlen oder Ordnungszahlen der unter ihnen stehenden Ziffern, weil sie die Stelle vor oder nach dem Komma, sowie die höhere oder niedere Einheit bezeichnen, nach

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

der jede Ziffer zählt. — Soll demnach ein gesprochener Decimalbruch richtig mit dem Komma geschrieben werden, so schreibe man seinen Zähler hin und setze seine niedrigste Ziffer in die Stelle hinter dem Komma, welche der Nenner durch die Anzahl seiner Nullen anzeigt und fülle nöthigenfalls die fehlenden Stellen hinter dem Komma sowie die erste Stelle vor demselben, als Zeichen, daß keine Ganze vorhanden sind, mit Nullen aus.

Beispiel: 306 Zehntel = 30,6; 314 Hundertel = 3,14; 28 Zehntausendtel = 0,0028; 7 Milliontel = 0,000007.

3. Ein Decimalbruch wird entweder verbunden oder unverbunden ausgesprochen. Verbunden spricht man ihn aus, wenn man den ganzen Zähler mit dem Nenner der niedrigsten Ziffer, unverbunden dagegen, wenn man jede Ziffer des Zählers mit dem ihr zugehörigen Nenner ausspricht. Im ersten Falle betrachtet man den Bruch als eine Summe von Einheiten der niedrigsten Ordnung, im zweiten Falle als eine Summe von Einheiten verschiedener Ordnungen.

Beispiel: 3,27 = 327 Hundertel = 3 Ganze, 2 Zehntel, 7 Hundertel.

4. Steht in einer decadischen Zahl das Komma fest, so können vor und hinter die Zahl beliebige Nullen gesetzt werden ohne den Werth der Zahl zu ändern. Wo hat man sich das Komma zu denken, wenn kein Komma in einer Zahl steht? Was geht eigentlich mit dem Bruche für eine Veränderung vor, wenn man ihm hinten Nullen ansetzt? Welcher Operation bei gemeinen Brüchen entspricht das Anhängen von Nullen?

5. Wird in einer Zahl das Komma gerückt, so wird der Werth der Zahl geändert. Jeder Rückung des Komma nach rechts oder links um 1, 2, 3 . . . n Stellen entspricht eine Multiplication oder Division mit 10, 100, 1000 . . . 10^n, weil dadurch der Werth jeder Ziffer um das 10, 100fache u. s. w. erhöht oder erniedrigt wird. Welche Operationen können also ohne Rechnung an Decimalzahlen vollzogen werden?

6. Addition und Subtraction der Decimalbrüche. Decimalbrüche werden wie ganze Zahlen addirt und subtrahirt. Man schreibt gleichnamige Einheiten unter einander (Komma unter Komma), addirt und subtrahirt auf die gewöhnliche Weise und setzt das Komma an dieselbe Stelle in der Summe, an der es in den Posten steht. Wodurch werden die Decimalbrüche auf gleiche Nenner gebracht?

7. Multiplication der Decimalbrüche. Decimalbrüche werden wie ganze Zahlen multiplicirt, im Producte aber so viele Bruchstellen von rechts nach links abgeschnitten als in den Factoren zusammengenommen vorhanden sind. Oder: die Stellenzahl der niedrigsten Ziffer im Producte ist der Summe der Stellenzahlen der niedrigsten Ziffern in den Factoren gleich.

Beispiel: 0,8 × 0,0012 = 0,00096.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beweis: Denn hat der eine Factor m, der andere n Bruchziffern, so wird das Product, wenn man beide Factoren als ganze Zahlen multiplicirt, gleichfalls mit $10^m . 10^n = 10^{m+n}$ multiplicirt. Man muß es demnach wieder mit 10^{m+n} dividiren oder das Komma um $m + n$ Stellen nach links rücken oder eben so viele Stellen abschneiden.

8. Division der Decimalbrüche. Decimalbrüche werden wie ganze Zahlen dividirt, nachdem man im Dividenden das Komma gerade um ebenso viele Stellen nach rechts gerückt hat als es im Divisor geschehen ist, um ihn zu einer ganzen Zahl zu machen oder das Komma ans Ende zu bringen. Die erste Ziffer des Quotienten erhält dieselbe Stelle vor oder hinter dem Komma, welche die niedrigste Ziffer im Dividenden hat, von der zuerst subtrahirt ist.

Beweis: Durch gleiche Rückung des Komma im Dividenden und Divisor ist der Quotient nicht geändert (§. 18). Da ferner der Divisor zu einer ganzen Zahl geworden ist, so ist jede Ziffer des Quotienten von derselben Benennung oder Ordnung, von welcher der Dividend ist, in den dividirt wird.

Beispiel: Soll 325,678 durch 276,49 dividirt werden, so ist $32567{,}8 : 27649 = 1, \ldots.$, weil 7 die niedrigste Ziffer des Dividenden ist, von der zuerst subtrahirt wurde. Wohin schreibt man deshalb beim Rechnen den Quotienten am bequemsten?

§. 30.

Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, und umgekehrt. Unvollständige Decimalbrüche. Rückverwandlung von Decimalbrüchen. Rechnung mit abgekürzten Decimalbrüchen.

1. Ein gemeiner Bruch ($^3/_7$) wird durch wirkliche Ausführung der in ihm angedeuteten Division in einen Decimalbruch verwandelt. Z. B. $^3/_7 = 0{,}4285714 \ldots.$ Bei Brüchen, deren Nenner sich in Factoren zerlegen lassen, dividirt man bequemer mit den Factoren nach einander, z. B. $\frac{13}{72} = \frac{13}{8.9} = \frac{1{,}44444}{8} = 0{,}18055 \ldots$ Wie werden ungleichbenannte Zahlen in Decimalbrüche ihrer höhern Einheiten verwandelt?

2. Vollständige Decimalbrüche. Aus 1 und §. 27, 10 folgt, daß nur diejenigen in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Brüche sich in vollständige Decimalbrüche verwandeln lassen, deren Nenner nur die Factoren 2 und 5 oder deren Potenzen enthalten, weil jede höhere Einheit unseres Zahlensystemes als eine Potenz von 10 sich nur durch die Factoren 2 und 5

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

ohne Rest dividiren läßt. Welche Brüche lassen sich demnach vollständig verwandeln?

3. Reine periodische Decimalbrüche. Diejenigen Brüche, deren Nenner weder den Factor 2 noch 5 enthalten, geben bei der Verwandlung unvollständige sogenannte rein periodische Decimalbrüche, d. h. Brüche, in denen eine bestimmte Anzahl von Ziffern immer in derselben Ordnung sich wiederholt. Die Perioden heißen nach der Anzahl der Ziffern einziffrig, zweiziffrig u. s. w., z. B. $^1/_3 = 0{,}333\ldots$ $^2/_9 = 0{,}222\ldots$ $^3/_{11} = 0{,}2727\ldots$ $^3/_7 = 0{,}428571428571\ldots.$ Die Periode kann höchstens $n-1$ Ziffern enthalten, wenn der Nenner n Einheiten hat. Warum? In diesem Falle heißt die Periode vollziffrig. So geben z. B. die Siebtel und die Neunundfunfzigstel vollziffrige Perioden. Welche Perioden geben die Drittel, Siebtel, Neuntel, Elftel, Dreizehntel?

4. Unreine periodische Decimalbrüche. Diejenigen Brüche, deren Nenner außer den Factoren 2 oder 5 auch noch andere Factoren (3, 7) enthalten, wie z. B. die Sechstel, Zwölftel, Vierzehntel u. s. w. geben bei der Verwandlung unvollständige sogenannte gemischte oder unreine Decimalbrüche, d. h. Brüche, deren Periode eine bestimmte Anzahl unperiodischer Ziffern vorangeht. Die Anzahl der unperiodischen Ziffern ist dem größten Exponenten des im Nenner vorkommenden Factors 2 oder 5 gleich und die Periode wird durch die größte Periode der andern Factoren bestimmt. So gibt der Bruch $\frac{7}{2^3 . 5 . 13 . 9} = 0{,}013461538461538\ldots.$ einen Bruch mit drei unperiodischen Ziffern und einer Periode von 6 Ziffern, weil 13 eine sechsziffrige und 9 eine einziffrige Periode hat.

Beweis: Denn statt mit dem ganzen Nenner zu dividiren, kann man mit den Factoren desselben nach einander dividiren. Da 2^n oder 5^m als Nenner erst in der n oder $m$ten (Potenz von 10) Stelle nach dem Komma aufgehen kann, so hängt die Anzahl der unperiodischen Ziffern von dem größten Exponenten ab. Aus demselben Grunde wird auch die Periode durch die größte Periode der andern Factoren bestimmt. Was für unreine periodische Brüche geben die Brüche, deren Nenner 6, 12, 14, 18, 22, 24, 48, 60, 360 ist?

6. Rückverwandlung der Decimalbrüche in gemeine Brüche. Bei der Rückverwandlung sind, wie bei der vorigen Aufgabe, 3 Fälle zu unterscheiden:

a. Vollständige Decimalbrüche werden in gemeine Brüche verwandelt, indem man sie wie gemeine Brüche schreibt und in den kleinsten Zahlen ausdrückt.

b. Reine periodische Decimalbrüche werden in gemeine Brüche verwandelt, indem man den Bruch in den kleinsten Zahlen ausdrückt,

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

dessen Zähler die Periode enthält, dem als Nenner eben so viele Neunen untergesetzt werden, als die Periode Ziffern hat.

Beweis: Ist der zu verwandelnde Bruch 0,4732547325 . . . so bezeichne man den zu suchenden gemeinen Bruch mit x und setze 0,4732547325 . . . . $= x$. Setzt man nun das Komma hinter die erste Periode oder multiplicirt den Werth des Bruches mit $10^5 = 100000$, so erhält man 47325,47325 . . . . $= 100000\,x$. Subtrahirt man den einfachen Werth des Bruches auf beiden Seiten von dem so multiplicirten Werthe, so erhält man

$$47325 = 99999\,x \text{ und daher}$$

$$x = \frac{47325}{99999} = \frac{15775}{33333}.$$

c. Unreine periodische Decimalbrüche werden in gemeine verwandelt, indem man denjenigen Bruch auf den kleinsten Ausdruck bringt, dessen Zähler die Differenz zwischen den sämmtlichen Ziffern der ersten Periode und den unperiodischen Ziffern ist, dem als Nenner so viele Neunen untergesetzt werden, als die Periode Ziffern hat, mit Anhängung von so vielen Nullen, als unperiodische Ziffern der Periode hervorgehen.

Beweis: Ist der zu verwandelnde Bruch 0,23456456 . . . . so setze man wieder 0,23456456 $= x$. Multiplicirt man erst mit 10^5 oder mit 100000, dann mit 10^2 oder mit 100, um das Komma einmal hinter die Periode und hinter die unperiodischen Ziffern zu bringen, so erhält man 23456,456 . . . . $100000\,x$

und 23,456 . . . . $100\,x$.

Subtrahirt man nun den unten stehenden Werth von dem obern, so erhält man $23456 - 23 = 99900\,x$ und daher

$$\frac{23433}{99900} = x = \frac{7811}{33300}.$$

6. **Verwandlung der Decimalbrüche in ungleichbenannte Zahlen.** Viel wichtiger als die Verwandlung von Decimalbrüchen in gemeine Brüche ist die Verwandlung von Decimalbrüchen in ungleichbenannte Zahlen. Sollen Decimalbrüche in ungleichbenannte Zahlen (Thalerbrüche in Groschen und Pfennige) verwandelt werden, so multiplicire man die Bruchziffern mit den betreffenden Einheitszahlen der nächstniedrigen Ordnung. Z. B. 36,233 Thlr. = 36 Thlr. 7 Gr. 1,1 Pf. Wie wird die Rechnung bei den verschiedenen Maß-, Gewichts-, Zeit- und Winkeleinheiten am bequemsten angeordnet und geführt?

7. **Abkürzung der Decimalbrüche.** Die meisten Decimalbrüche, mit denen man zu rechnen hat, sind unvollständige Decimalbrüche. Sie müssen hinter irgend einer Stelle abgebrochen oder abgekürzt werden. Diese Ab-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

kürzung kann immer so geschehen, daß der Fehler nie eine halbe Einheit der letzten stehenbleibenden Ziffer beträgt. Ist nämlich die erste wegfallende Ziffer kleiner als 5 (1, 2, 3, 4), so werden die stehenbleibenden Ziffern ungeändert hingeschrieben; ist sie dagegen 5 mit nachfolgenden geltenden Ziffern oder größer als 5 (6, 7, 8, 9), so wird die letzte stehenbleibende Ziffer um 1 erhöht. Worin liegt der Grund für dies Verfahren? Wie verfährt man, wenn die erste wegfallende Ziffer eine 5 mit folgenden Nullen ist?

8. Wo soll abgekürzt werden? Hinter welcher Stelle man abkürzen darf, hängt von dem größern oder geringern Grade der Genauigkeit, der Größe der Einheit und der einzelnen Rechnungsart ab. In den Rechnungsresultaten reicht man im gemeinen Leben häufig schon mit 2 Decimalstellen aus, in den meisten Fällen genügen 3 und höchst selten gebraucht man 4 Stellen. Die größte wissenschaftliche Genauigkeit erfordert höchstens 6 oder 7 Stellen.

Hinter welcher Stelle sind Thalerbrüche abzukürzen, um keinen Fehler von einem halben Pfennig zu machen? Hinter welcher Stelle Ruthenbrüche, um keinen Fehler von einem Zoll zu machen? Hinter welcher Stelle Gradbrüche, um keinen Fehler von $^1/_{10}$ Secunde zu machen? Was für einen Fehler macht man, wenn man geographische Meilenbrüche (24000′) hinter der fünften Stelle abbricht?

9. Abgekürzte Addition und Subtraction. Die Addition mit abgekürzten Brüchen bedarf weiter keiner Erörterung, sie wird ebenso wie an vollständigen Brüchen vollzogen, nachdem man die gegebenen Zahlen auf gleichviele Stellen abgekürzt hat. Soll das Resultat auf n Stellen richtig sein, so braucht man höchstens bei der Addition in den Posten mit $n+2$ Stellen zu rechnen; bei der Subtraction reicht man schon mit $n+1$ Stelle aus. Kann das Resultat bei der abgekürzten Addition und Subtraction auch völlig fehlerfrei sein und wann ist dies der Fall? (Beispiele.) Warum kürzt man auf gleich viele Stellen ab?

10. Abgekürzte Multiplication. Die Multiplication mit abgekürzten Decimalbrüchen geschieht auf folgende Weise: Man kürze, wenn es gestattet ist, die Factoren auf gleich viele Stellen ab, multiplicire den ganzen Multiplicanden mit der höchsten geltenden Ziffer des Multiplicators, hierauf den Multiplicanden mit Ausschluß der letzten Ziffer mit der zweiten Ziffer des Multiplicators u. s. w., so lange als es geht und ordne die Ziffern, so daß die letzten Ziffern vertical untereinander zu stehen kommen. Um aber die Fehler in den letzten Ziffern so klein als nur möglich zu machen, addire man die Zehner aus der ersten weggestrichenen Ziffer im Multiplicanden noch hinzu, so daß der Fehler der Abkürzung kleiner als eine halbe Einheit ist. Die Stelle der niedrigsten Ziffer im Producte bestimmt sich durch die Stel-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

len der beiden Ziffern im Multiplicanden und Multiplicator, mit denen zuerst multiplicirt ist.

Rechtfertigung des Verfahrens. Die Gründe für dies Verfahren werden dem Schüler am besten deutlich werden, wenn er sich folgende Fragen vorlegt: Ist es erlaubt mit den Ziffern des Multiplicators in jeder beliebigen Ordnung zu multipliciren? Warum werden die letzten Ziffern nicht eingerückt? Welchen Grund hat die Regel für die niedrigste Stelle im Producte? Ist sie eine andere als bei der vollständigen Multiplication?

Beispiel:

```
0,076934210834 ×
0,000003057026
--------------
  230802632502
    3846710541
     538539475
       1538684
        461605
--------------------
0,0000002351898882807
```

Fragen: Wenn 4 Stellen im Producte richtig sein sollen, wie weit hat man den Multiplicanden zu berechnen, wenn die höchste Stelle des Multiplicators von der $+2$, $+1$, -3 Stelle ist? Diese und ähnliche Fragen stelle der Lehrer, um den Schüler daran zu gewöhnen, selbst zu finden, wie weit er zu rechnen hat, um das Resultat auf eine bestimmte Anzahl Stellen richtig zu finden. Warum thut man gut, das Product auf $n+2$ Stellen zu berechnen, wenn n Stellen richtig sein sollen?

11. Abgekürzte Division. Die Division mit abgekürzten Brüchen geschieht auf folgende Weise: Man bringt, wie bei der vollständigen Division, das Komma ans Ende des Divisors und formt demgemäß auch den Dividenden um. Statt dem Dividenden nach und nach Nullen oder geltende Ziffern anzuhängen, kürze man den Divisor wiederholt um eine Ziffer ab.

Die Zehner aus der zuletzt weggestrichenen Ziffer des Divisors, multiplicirt mit dem Quotienten, addirt man wie bei der Multiplication zu den letzten Ziffern der Subtrahenden hinzu. Die Stelle der ersten Ziffer im Quotienten bestimmt sich ganz ebenso wie bei der vollständigen Division.

Rechtfertigung. Das Verfahren wird sich am einfachsten an einem durchgerechneten Beispiele erläutern lassen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

3,716048.

Beispiel: 7,632035 : 2,053804

```
7,432096
--------
  199939
  185802
  ------
   14137
   11148
   -----
    2989
    2972
    ----
      17
      14
      --
       3
```

Fragen: Wenn man den Quotienten auf n Ziffern richtig haben will, wie weit muß man ihn abgekürzt berechnen? Könnte man die Division nicht ganz umgehen? Und in welchen Fällen würde dies praktisch vorzuziehen sein?

12. Vortheilhafte Verwendung der Rechnung mit abgekürzten Decimalbrüchen:

a. Bei Additionen und Subtractionen mit großen Generalnennern.

b. Bei Multiplicationen und Divisionen mit vielziffrigen Factoren oder Dividenden und Divisoren bei wenigen geforderten Bruchziffern im Producte oder Quotienten.

D. Verhältnisse und Proportionen.

§. 21.

A. Von den Verhältnissen im Allgemeinen.

1. Alle alten Mathematiker und der größere Theil der deutschen Mathematiker der Gegenwart nennen zwei unbenannte oder gleichbenannte Zahlen, die zu einer Differenz oder einem Quotienten verbunden sind, ein arithmetisches und im zweiten Falle ein geometrisches Verhältniß. Die allgemeine Form der beiden Verhältnisse ist demnach:

$$\left.\begin{array}{ll} a - b & \text{für das arithmetische} \\ a : b & \text{für das geometrische} \end{array}\right\} \text{Verhältniß.}$$

Beide Formen werden a zu b oder a verhält sich zu b gelesen. Der Minuend und Dividend heißen Vorderglieder (Antecedenten), der Subtrahend und Divisor dagegen Hinterglieder (Consequenten) der Verhältnisse und der Unterschied oder der Quotient der beiden in Verhältniß stehenden Zahlen heißt Differenz oder Exponent des Verhältnisses.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

2. Zwei gleiche und durch das Gleichheitszeichen verbundene arithmetische oder geometrische Verhältnisse bilden eine arithmetische oder geometrische Proportion. Ihre allgemeine Form ist demnach

$$a - b = c - d$$
$$a : b = c : d.$$

In einer solchen Proportion heißen das erste und vierte Glied äußere, sowie das zweite und dritte innere Glieder.

3. Aus dieser Erklärung folgt, daß in dem arithmetischen Verhältnisse die Differenz mit den Gliedern gleich benannt sein muß, in dem geometrischen Verhältnisse aber als unbekannte Zahl erscheint.

4. Die beiden Benennungen arithmetisches und geometrisches Verhältniß, sowie arithmetische und geometrische Proportion haben ihren Grund in der unvollkommnen Ausbildung der Arithmetik bei Griechen und Römern, die durch ihre unsystematischen Ziffern verhindert waren, die Gesetze der Multiplication und Division allgemein entwickeln zu können und namentlich in Verlegenheit gerathen mußten, wenn es sich darum handelte, aus einem Quotienten und dem Dividenden oder Divisor eines andern gleichen Quotienten die fehlende Zahl zu bestimmen. Sie lösten diese Aufgabe auf geometrischem Wege durch Aufsuchung der vierten Proportionale und benannten nun diese beiden gleichen Quotienten eine geometrische Proportion und jeden Quotienten für sich ein geometrisches Verhältniß im Gegensatz zu zwei gleichen Differenzen, die eine arithmetische Proportion bildeten und die sie auf arithmetischem Wege darstellen konnten.

5. Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen enthält Nichts, was nicht schon früher bei der Lehre von den Differenzen und Quotienten vorgekommen wäre und ist daher theoretisch bei der jetzigen Darstellung der Arithmetik überflüssig. Da aber in den meisten Lehrbüchern der Geometrie die Lehrsätze über Proportionalität der Linien und Aehnlichkeit der Dreiecke vermittelst der Lehrsätze über die Verhältnisse und Proportionen bewiesen werden und sich in manchen Fällen für verwickelte Aufgaben ein leichter Ansatz durch Anwendung der Verhältnisse und Proportionen ergibt, so behält man die Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen noch bei, nachdem die arithmetischen Verhältnisse und Proportionen schon längst als unnützer Ballast über Bord geworfen sind. In dem ganzen Capitel wird deshalb nur noch von geometrischen Verhältnissen und Proportionen die Rede sein.

B. Von den geometrischen Verhältnissen.

6. In jedem geometrischen Verhältnisse ist nach der Erklärung desselben
a. das Vorderglied (der Dividend) gleich dem Product aus Exponent und Hinterglied.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

β. das Hinterglied als Divisor gleich dem Quotienten aus Vorderglied durch den Exponenten.

γ. der Exponent als Quotient gleich dem Quotienten aus Vorderglied durch das Hinterglied oder in allgemeinen Zeichen, wenn a das Vorderglied, b das Hinterglied und e den Exponenten bezeichnet

$$1,\ a = b\,e;\ \ 2,\ b = \frac{a}{e};\ \ 3,\ e = \frac{a}{b}.$$

7. Der Exponent eines geometrischen Verhältnisses oder das Verhältniß selber wird multiplicirt oder dividirt mit einer Zahl m, wenn das Vorderglied mit derselben Zahl m multiplicirt oder dividirt wird, ebenso wird es mit der Zahl m multiplicirt oder dividirt, wenn man das Hinterglied mit derselben Zahl dividirt oder multiplicirt.

8. Ungeändert bleibt ein geometrisches Verhältniß, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt. Durch Multiplication oder Division der beiden Glieder eines Verhältnisses mit einer und derselben Zahl werden die Verhältnisse vereinfacht und auf einen deutlicheren Ausdruck gebracht und namentlich

a. Verhältnisse von Bruchzahlen auf ganze Zahlen gebracht.

b. Verhältnisse von ganzen Zahlen in kleineren Zahlen ausgedrückt.

c. Verhältnisse so umgeformt, daß ein Glied des Verhältnisses zur Einheit wird.

9. Ein Bruchverhältniß wird in ein Verhältniß ganzer Zahlen verwandelt, wenn man den Zähler eines jeden Gliedes mit dem Nenner des andern Gliedes multiplicirt und die Nenner fortläßt; denn dadurch wird jedes Glied mit dem Generalnenner multiplicirt.

10. Ein Verhältniß wird in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, wenn man beide Glieder mit dem größten gemeinschaftlichen Maße oder mit sämmtlichen gemeinschaftlichen Factoren nach einander dividirt.

11. Ein Glied eines Verhältnisses wird zur Einheit gemacht, wenn man beide Glieder mit dem betreffenden Gliede dividirt und den etwa erscheinenden Bruch in einen Decimalbruch verwandelt.

12. Der Exponent und das Verhältniß wird umgekehrt (convertirt), wenn die Glieder desselben vertauscht werden.

13. Durch Addition oder Subtraction des Vorder- oder Hintergliedes zum Hinter- oder Vordergliede gehen wichtige Veränderungen mit dem Exponenten und dem Verhältnisse selbst vor. Ist das Verhältniß $a : b$ und sein Exponent $\frac{a}{b} = e$, so ist der Exponent in dem Verhältnisse

a. $$a \pm b : b = \frac{a \pm b}{b} = \frac{a \pm b : b}{b : b} = \frac{e \pm 1}{1} = e \pm 1,$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

d. h. der Exponent des ursprünglichen Verhältnisses wird um eine Einheit vermehrt oder vermindert.

b. $a : a \pm b = \frac{a}{a \pm b} = \frac{a : b}{(a \pm b) : b} = \frac{e}{e \pm 1}$,

d. h. der Exponent des neuen Verhältnisses ist gleich dem Quotienten aus dem alten Exponenten, dividirt durch den um eine Einheit vermehrten ursprünglichen Quotienten.

c. $a \pm b : a = \frac{a \pm b}{a} = \frac{(a \pm b) : b}{a : b} = \frac{e \pm 1}{e}$.

d. $b : a \pm b = \frac{b}{a \pm b} = \frac{b : b}{(a \pm b) : b} = \frac{1}{e \pm 1}$.

e. $a + b : a - b = \frac{a + b}{a - b} = \frac{(a + b) : b}{(a - b) : b} = \frac{e + 1}{e - 1}$.

f. $a - b : a + b = \frac{a - b}{a + b} = \frac{(a - b) : b}{(a + b) : b} = \frac{e - 1}{e + 1}$.

g. $ma \pm nb : pa \pm qb = \frac{ma \pm nb}{pa \pm qb} = \frac{(ma \pm nb) : b}{(pa \pm qb) : b} = \frac{me \pm n}{pe \pm q}$.

14. Mehrere Verhältnisse heißen fortlaufende Verhältnisse, wenn das Hinterglied des vorangehenden Verhältnisses dem Vordergliede des nachfolgenden Verhältnisses gleich ist. Fortlaufende Verhältnisse sind z. B. die Verhältnisse

$a : b;\; b : c;\; c : d;\; d : e;\; e : f;\; f : g$ u. s. w.

Aus ihnen bildet man durch abgekürzte Schreibart das fortlaufende Verhältniß $a : b : c : d : e : f : g$ u. s. w.

15. Mehrere Verhältnisse werden in ein fortlaufendes verwandelt, wenn man jedes Verhältniß mit den Hintergliedern der vorangegangenen und den Vordergliedern der nachfolgenden Verhältnisse multiplicirt. Aus den Verhältnissen

$$\left.\begin{matrix} a : b \\ c : d \\ e : f \\ g : h \end{matrix}\right\} \text{ werden die fortlaufenden Verhältnisse } \left\{\begin{matrix} aceg : bceg \\ bceg : bdeg \\ bdeg : bdfg \\ bdfg : bdfh. \end{matrix}\right.$$

und das fortlaufende Verhältniß

$$aceg : bceg : bdeg : bdfg : bdfh.$$

Für das praktische Berechnen verfährt man am bequemsten nach folgender Form:

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\begin{array}{l}
a : b \\
\quad c : d \\
\hline
ac : bc : bd \\
\qquad\quad e : f \\
\hline
ace : bce : bde : bdf \\
\qquad\qquad\qquad\quad g : h \\
\hline
aceg : bceg : bdeg : bdfg : bdfh,
\end{array}$$

indem man sämmtliche vorhandenen Glieder mit dem Vordergliede und das letzte Glied mit dem Hintergliede des neu hinzukommenden Gliedes multiplicirt.

Kommen in den Vorder- und Hintergliedern der zu verbindenden Verhältnisse gleiche Factoren vor, so kann das fortlaufende Verhältniß durch sie dividirt oder verkleinert werden, wenn sie von unten links gegen oben rechts vorhanden sind. Soll z. B. aus den Verhältnissen 2 : 3
3 : 1
2 : 1 das fortlaufende Verhältniß gebildet werden, so hebt sich 3 gegen 3 und man erhält

$$\begin{array}{l}
2 : 3 \\
\quad 3 : 1 \\
\hline
2 : 3 : 1 \\
\qquad 2 : 1 \\
\hline
4 : 6 : 2 : 1
\end{array}$$

Soll aus $5 : \cancel{3}$
$1 : \cancel{2}$
$\cancel{4} : \cancel{5}$
$\cancel{5} : 9$
$\cancel{3} : 2$ das fortlaufende Verhältniß gebildet werden, so kann man mit 2, 5 u. 3 heben und man erhält das fortlaufende Verhältniß

$$10 : 6 : 12 : 15 : 27 : 18$$

16. Ein Verhältniß heißt aus mehreren Verhältnissen zusammengesetzt, wenn sein Vorder- und Hinterglied Producte sind aus den Vorder- und Hingliedern der gegebenen Verhältnisse. So ist z. B. aus den Verhältnissen
$a : b$
$c : d$
$e : f$ das zusammengesetzte Verhältniß $ace : bdf$ gebildet.

Haben Vorder- und Hinterglieder gemeinschaftliche Factoren, so kann das zusammengesetzte Verhältniß durch sie dividirt werden. Das zusammengesetzte Verhältniß von

$$\left.\begin{array}{l}
a : b \\
b : c \\
c : d \\
d : e
\end{array}\right\} \text{ ist } a : e.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Der Exponent des zusammengesetzten Verhältnisses ist dem Producte der Exponenten der einfachen Verhältnisse gleich. Sind $a:b,\ c:d,\ e:f,\ g:h$ die gegebenen Verhältnisse und ihre Exponenten $e,\ e',\ e'',\ e'''$, so ist

$$\frac{aceg}{bdfh} = e\,e'\,e''\,e'''.$$

17. Ein Verhältniß heißt ein quadratisches oder cubisches Verhältniß, wenn es sich aus der Zusammensetzung zweier oder dreier identischen Verhältnisse gebildet hat. So ist z. B. aus $2:3$ und $2:3$ das quadratische Verhältniß $2^2:3^2 = 4:9$ entstanden und aus $3:5$, $3:5$, $3:5$ das cubische Verhältniß $3^3:5^3 = 27:125$ entstanden.

§. 32.

Von den Proportionen.

1. Zwei gleiche und durch das Gleichheitszeichen verbundene Quotienten oder Verhältnisse bilden eine Proportion. Sind $a:b$ und $c:d$ gleiche Verhältnisse, so heißt die aus ihnen gebildete Proportion $a:b = c:d$. In jeder Proportion heißen das erste und das vierte Glied äußere, sowie das zweite und dritte Glied innere Glieder; das erste und dritte, sowie das zweite und vierte Glied heißen homologe Glieder, weil sie in beiden Verhältnissen entweder beide Vorder- oder beide Hinterglieder sind. Das vierte Glied in jeder Proportion heißt auch die vierte Proportionale.

2. Sind in einer Proportion z. B. $a:b = b:c$ die mittleren Glieder gleich, so schreibt man sie abgekürzt $a:b:c$ und nennt das gleiche Glied die mittlere und das dritte Glied die dritte Proportionale, sowie die ganze Proportion eine stetige Proportion.

3. In jeder Proportion ist das Product der innern und äußern Glieder gleich. Ist $a:b = c:d$, so ist $ad = bc$; denn da $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $ad = bc$, wenn man beide Quotienten mit bd multiplicirt.

Dieser Satz dient zum Probirstein der Richtigkeit einer Proportion.

4. Man findet durch diesen Satz in jeder Pooportion das vierte Glied, wenn man die gegebenen innern oder äußern Glieder durch das gegebene äußere oder innere Glied dividirt.

Ist $a:x = b:c$, so ist $ac = bx$, daher $\frac{ac}{b} = x$.

5. Wenn zwei Producte aus zwei Factoren gleich sind, so erhält man jedes Mal eine richtige Proportion, wenn man die Factoren des einen Pro-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

ductes zu äußern und die des andern Productes zu innern Gliedern einer Proportion macht.

Wenn $mn = op$, so ist $m : o = p : n$; denn dividirt man die gleichen Producte mit np, so ist $\frac{mn}{np} = \frac{op}{np} = \frac{m}{p} = \frac{o}{n} = m : o = p : n$.

6. Man findet das dritte Glied in einer stetigen Proportion, wenn man das Quadrat des zweiten Gliedes durch das erste Glied dividirt.

Ist $a : b : x$, so ist $x = \frac{b^2}{a}$.

Bemerkung. Arithmetisches Mittel oder Durchschnittszahl nennt man diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Summe der Zahlen durch die Anzahl der Posten dividirt. Das arithmetische Mittel zu zwei Zahlen ist demnach ihre halbe Summe. Sind a und b die gegebenen Zahlen, so ist ihr arithmetisches Mittel $\frac{a+b}{2}$.

7. Man findet das mittlere Glied in jeder stetigen Proportion, wenn man aus dem Producte des ersten und dritten Gliedes die Wurzel zieht. Wenn $a : x : c$, so ist $x = \sqrt{ac}$. Wie die Wurzel gefunden wird, kann erst in dem folgenden Abschnitte gezeigt werden.

8. Veränderungen der Proportion durch Umstellung der Glieder.

a. In jeder Proportion dürfen die äußern und innern Glieder unter sich vertauscht werden; denn dadurch bleiben die Producte der äußern und innern Glieder dieselben und die Proportion demnach ungestört. Ist $a : b = c : d$, so ist auch $a : c = b : d$
und $d : b = c : a$.

b. In jeder Proportion dürfen die Verhältnisse vertauscht werden, denn dadurch bleiben die Quotienten selbst ungeändert. Ist $a : b = c : d$, so ist auch $c : d = a : b$.

c. In jeder Proportion dürfen beide Verhältnisse umgekehrt werden; denn dadurch bleiben die Producte der äußern und innern Glieder gleich. Ist $a : b = c : d$, so ist auch $b : a = d : c$. Nimmt man mit einer Proportion alle nach a., b., c., gestatteten Umstellungen vor, so erhält man zu der gegebenen Proportion noch 7 andere, also im Ganzen 8 Proportionen, von denen immer je zwei dasselbe Glied zum Anfangsgliede haben. Ist $a : b = c : d$, so erhält man durch die Umstellungen folgende 8 Formen:

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$a:b = c:d$ die ursprüngliche Form; aus ihr entsteht
$a:c = b:d$ durch Vertauschung der innern Glieder; aus der ursprünglichen Form
$b:a = d:c$ durch Umkehrung der Verhältnisse; aus ihr
$b:d = a:c$ durch Vertauschung der innern Glieder; aus der ursprünglichen Form
$c:d = a:b$ durch Umstellung der Verhältnisse; aus ihr
$c:a = d:b$ durch Vertauschung der innern Glieder; aus der ursprünglichen Form
$d:c = b:a$ durch Umstellung und Umkehrung der Verhältnisse und aus ihr
$d:b = c:a$ durch Vertauschung der innern Glieder.

Wie verhalten sich die Exponenten dieser Umformungen zu einander und zu dem Exponenten der ursprünglichen Form? —

9. Veränderungen der Proportionen durch Multiplication oder Division ihrer Glieder mit bestimmten Zahlen.

a. in jeder Proportion dürfen ein oder beide Verhältnisse mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt werden; denn dadurch bleibt der Exponent des Verhältnisses oder die gegebenen gleichen Quotienten ungeändert. Ist $a:b = c:d$, so ist auch $am:bm = c:d$ u. s. w.

b. In jeder Proportion dürfen die homologen Glieder mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt werden; denn dadurch werden die Exponenten der gleichen Verhältnisse auf gleiche Weise verändert. Ist $a:b = c:d$, so ist auch $am:b = cm:d$ u. s. w.

c. In jeder Proportion darf man das eine äußere oder innere Glied mit jeder beliebigen Zahl multipliciren oder dividiren, wenn man zugleich das andere zugehörige äußere oder innere Glied mit dem umgekehrten Werthe der Zahl multiplicirt oder dividirt; denn dadurch bleibt das Product der äußern und innern Glieder gleich und ungeändert. Ist $a:b = c:d$, so ist auch $a\frac{m}{n}:b = c:d\frac{n}{m}$ u. s. w.

10. Veränderungen einer Proportion durch Addition oder Subtraction.

a. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum ersten oder zweiten Gliede, wie die Summe oder Differenz des dritten oder vierten Gliedes zum dritten oder vierten Gliede; denn dadurch sind die Exponenten der gegebenen beiden Verhältnisse auf gleiche Weise verändert.
Ist $a:b = c:d$, so ist auch $a+b:a = c+d:c$ u. s. w.

b. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zur Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes, wie das erste zum dritten oder das zweite zum vierten Gliede. Diese Veränderung ergibt sich aus a durch Vertauschung der mittleren oder äußeren Glieder.
Ist $a+b:a = c+d:c$, so ist auch $a+b:c+d = a:c$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

c. In jeder Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zu ihrer Differenz, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zu ihrer Differenz; denn durch diese Veränderung werden die gleichen Exponenten der Verhältnisse auf gleiche Weise verändert, oder die Producte der innern und äußern Glieder bleiben gleich. Ist $a:b=c:d$, so ist auch $a+b:a-b=c+d:c-d$.

d. In jeder Proportion verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zur Summe der beiden letzten Glieder wie die Differenz der beiden ersten Glieder zur Differenz der beiden letzten Glieder. Diese Veränderung erhält man aus der vorigen durch Vertauschung der mittleren Glieder. Ist

$$a:b=c:d, \text{ so ist auch } a+b:c+d=a-b:c-d.$$

Bemerkung. Addirt oder subtrahirt man irgend eine andere Zahl zu den vier Gliedern einer Proportion oder zu den homologen Gliedern u. s. w., so wird dadurch die Proportionalität gestört, ausgenommen in dem Verhältnisse der Identität $a:a$ oder $1:1$, in dem es gestattet ist. Die Unrichtigkeit der auf diese Weise gebildeten Proportionen ergibt sich leicht durch Vergleichung der Producte aus den innern und äußern Gliedern dieser abgeleiteten Proportion. Auch ergibt sich zugleich aus dieser Vergleichung die Bedingung der Identität des Verhältnisses, unter der die Addition oder Subtraction gestattet ist.

e. Sind mehr als zwei Verhältnisse einander gleich, so verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie irgend ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Formel: Ist $a:b=c:d=e:f=g:h$, so ist auch

$$a+c+e+g:b+d+f+h=a:b=c:d=e:f \text{ u. s. w.}$$

Beweis: Wenn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=q$ ist, so ist $a=bq$

$$c=dq$$
$$e=fq$$
$$g=hq \text{ und}$$

$$a+c+e+g=(b+d+f+h)q, \text{ daher}$$

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=q \text{ und daher endlich auch}$$

$$a+c+e+g:b+d+f+h=a:b=c:d \text{ u. s. w.}$$

f. Sind mehr als zwei Verhältnisse einander gleich, so verhält sich jede beliebige Verbindung durch Addition oder Subtraction irgend beliebiger Vielfacher der Vorderglieder zu derselben Verbindung derselben Vielfachen der Hinterglieder wie irgend ein Vorderglied zu seinem entsprechenden Hintergliede. Ist

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Formel: $a:b=c:d=e:f=g:h$ u. s. w.,
so ist $am \pm cn \pm eo \pm gp : bm \pm dn \pm fo \pm hp = a:b = c:d$ u. s. w.
Beweis ist ganz dem in e ähnlich.

Von den fortlaufenden Proportionen.

11. a. Sind zwei fortlaufende Verhältnisse einzeln genommen einander gleich, so bilden sie, wenn sie durch das Gleichheitszeichen verbunden sind, eine fortlaufende Proportion. Wenn

$$\left.\begin{aligned} a:b &= 2:3 \\ b:c &= 3:4 \\ c:d &= 4:5 \\ d:e &= 5:7 \end{aligned}\right\} \text{so ist } a:b:c:d:e = 2:3:4:5:7$$

eine fortlaufende Proportion und $a:b:c:d:e$ das erste, sowie $2:3:4:5:7$ das zweite Verhältniß und a, b, c, d u. s. w. die Glieder desselben.

b. Der fortlaufenden Proportionen bedient man sich, wenn die Größenverhältnisse von mehr als zwei Größen vollständig und übersichtlich angegeben werden sollen. Sind z. B. die Größen A, B, C, D, E und ihre entsprechenden Verhältnißzahlen m, n, o, p, q, so sind in der fortlaufenden Proportion $A:B:C:D:E = m:n:o:p:q$ alle Größenverhältnisse unter diesen Größen vollständig ausgedrückt und man braucht nur je zwei gleichstellige Glieder auf beiden Seiten der Reihe nach zu einer Proportion zu verbinden, um sie gesondert und vollständig zu haben.

c. Bilden die Verhältnißzahlen der mit einander zu vergleichenden Größen oder die Größen selbst kein fortlaufendes Verhältniß, so muß dasselbe aus ihnen erst nach §. 15 gebildet werden. Ist

$$\left.\begin{aligned} A:B &= m:n \\ B:C &= o:p \\ C:D &= q:r \\ D:E &= s:t \end{aligned}\right\} \text{so ist } A:B:C:D:E = moqs:noqs:npqs:nprs:nprt$$

d. In jeder fortlaufenden Proportion verhält sich irgend eine Verbindung unter den Gliedern des ersten Verhältnisses zu derselben Verbindung unter den Gliedern des zweiten Verhältnisses, wie irgend ein Glied des ersten Verhältnisses zu dem entsprechenden Gliede des zweiten Verhältnisses. Wenn

$A:B:C:D = m:n:p:q$, so ist

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} = \frac{D}{q} \text{ und daher nach 27 } f$$

$$Ax \pm By \pm Cz \pm Du : A : B : C : D = mx \pm ny \pm oz \pm pu : m : n : p : q.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Von den zusammengesetzten Proportionen.

12. a. Wenn aus mehreren einfachen Proportionen dadurch eine neue gebildet wird, daß die Producte der gleichstelligen Glieder zu einer neuen Proportion verbunden werden, so heißt diese neue Proportion aus jenen einfachen zusammengesetzt.

$$\begin{array}{ll} \text{Ist} & a : b = c : d \\ \text{und} & e : f = g : h \\ \hline \text{so ist} & ae : fb = cg : dh \end{array}$$

Finden sich in den Vorder- und Hintergliedern gleiche Factoren, so dürfen diese gegeneinander gehoben werden.

$$\begin{array}{ll} \text{Ist z. B.} & A : B = m : n \\ & B : C = o : p \\ & C : D = q : r \\ \hline \text{so ist} & A : C = mo : np \\ & A : D = moq : npr \\ & B : D = oq : pr. \end{array}$$

b. Der Exponent der zusammengesetzten Proportion ist dem Producte aus den Exponenten der einfachen Proportionen gleich (nach §. 16).

c. Eine Proportion bleibt ungestört, wenn ihre Glieder zu gleich hohen Potenzen erhoben werden; denn die so veränderte Proportion ist aus der ursprünglichen durch Zusammensetzung mit sich selbst entstanden. Ist $a:b = c:d$, so ist $a^n : b^n = c^n : d^n$.

d. Eine Proportion bleibt ungestört, wenn ihre Glieder mit gleichen Exponenten radicirt werden. Ist $a : b = c : d$, so ist auch

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}, \text{ denn wenn}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ so ist auch } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}} \text{ oder } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} \text{ oder}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$$

Harmonische Proportion.

13. Vier Zahlen bilden eine harmonische Proportion, wenn sich der Unterschied der beiden ersten zum Unterschied der beiden letzten wie die erste zur vierten verhält. Sind a, b, c, d vier gegebene Zahlen, so bilden sie eine solche Proportion, wenn $a - b : c - d = a : d$; oder 5, 3, 21, 15 bilden eine harmonische Proportion, weil $5 - 3 : 21 - 15 = 5 : 15$ oder $2 : 6 = 5 : 15$ ist.

14. Eine stetige harmonische Proportion findet unter drei Zahlen statt, wenn der Unterschied der ersten und zweiten zum Unterschiede der zweiten und

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

dritten sich gerade so verhält, wie die erste zur dritten Zahl. Sind a, b, c drei gegebene Zahlen, so bilden sie eine stetige harmonische Proportion, wenn $a - b : b - c = a : c$ oder 3, 4, 6 bilden eine harmonische stetige Proportion, weil $6 - 4 : 4 - 3 = 6 : 3$ oder $2 : 1 = 6 : 3$ ist. Die Zahl 4 heißt das harmonische Mittel und die Zahl 6 die dritte harmonische Proportionale.

15. Die Benennung harmonische Proportion ist aus der Musik entlehnt und rührt daher, daß die Töne des Duraccords (Grundton, große Terz und Quinte), so ferne sie durch die entsprechenden Saitenlängen ausgedrückt werden, eine stetige harmonische Proportion bilden.

16. Wenn drei Zahlen a, b, c eine harmonische Proportion bilden, so ist $a - b : b - c = a : c$ und daher

$$a = \frac{bc}{2c - b};\ c = \frac{ab}{2a - b};\ b = \frac{2ac}{a + c}.$$

17. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist größer als ihr geometrisches Mittel. Sind a und b die gegebenen Zahlen, so ist $\frac{a + b}{2}$ ihr arithmetisches und $\sqrt{ab}$ ihr geometrisches Mittel. Nun ist aber

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = ab;\ \text{daher}\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab\ \text{und}\ \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

18. Das geometrische Mittel zweier Zahlen ist die mittlere Proportionale zu ihren arithmetischen und harmonischen Mitteln. Sind a und b die gegebenen Zahlen, so ist $\frac{a + b}{2}$ das arithmetische, $\sqrt{ab}$ das geometrische und $\frac{2ab}{a + b}$ das harmonische Mittel und $\frac{a + b}{2} : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : \frac{2ab}{a+b}$ was zu beweisen war.

§. 33.

Anwendungen der Proportionslehren auf die Rechnungen des bürgerlichen Lebens.

1. Man sagt von zwei von einander abhängigen Größen, mögen sie gleich- oder ungleichartig sein, daß sie in geradem Verhältniß zu einander stehen, wenn mit der einen dieselbe Veränderung durch Multiplication oder Division vorgeht, welche mit der andern vorgenommen ist. M und N stehen in geradem Verhältniß zu einander, wenn dem Mp auch ein Np oder dem $\frac{M}{p}$ ein $\frac{N}{p}$ entspricht.

Beispiele von geraden Verhältnissen geben:

Waaren und ihre Preise bei übrigens gleichen Voraussetzungen.
Zinsfuß und Zinsen " " " "
Capital und Zinsen " " " "
Zahl der Arbeiter und geleistete Arbeit.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Geschwindigkeit und durchlaufene Räume.
Zeit und durchlaufene Räume.
Centri-Winkel und Bogen.
Länge oder Breite und Inhalt eines Rechtecks.
Ein Factor und sein Product u. s. w.

2. *Man sagt von zwei von einander abhängigen Größen, daß sie in* umgekehrtem (conversem oder inversem) Verhältniß zu einander stehen, wenn mit der einen dieselbe Veränderung durch Multiplication oder Division vorgeht, welche mit der andern durch Division oder Multiplication vorgenommen ist. M und N stehen in umgekehrtem Verhältniß zu einander, wenn dem Mp ein $\frac{N}{p}$ oder dem $\frac{M}{p}$ ein Np entspricht.

Beispiele von umgekehrten Verhältnissen sind:

Zinsfuß und Zeit bei übrigens gleichen Voraussetzungen.
Zinsfuß und Capital „ „ „ „
Arbeiter und Zeit.
Geschwindigkeit und Zeit.
Länge und Breite eines Rechtecks.
Divisor und Quotient u. s. w.

3. Hängt irgend eine Größe nur von einer Größe ab, so steht sie zu ihr in einfachem Verhältniß, hängt sie dagegen von mehreren Größen zugleich ab und zwar so, daß ihre Maßzahlen mit einander multiplicirt werden müssen, um die Größe jener zu bestimmen, so steht sie in zusammengesetztem Verhältniß zu ihnen.

Beispiele von einfachen Verhältnissen sind alle unter 1 und 2 aufgeführten Beispiele.

Beispiele von zusammengesetzten Verhältnissen sind:

Flächeninhalt eines Rechtecks zu seiner Länge und Breite.
Volumen eines Parallelopipeds zu seiner Länge, Breite und Höhe.
Zinsen zu Capital, Zinsfuß und Zeit.
Durchlaufener Raum zu Zeit und Geschwindigkeit.
Arbeit zur Zahl der Arbeiter, Dauer der Arbeit und Fleiß der Arbeiter.
Herstellungskosten eines Buches zum Honorar des Schriftstellers, zum Papier, zum Satz, zum Druck und den übrigen Unkosten.

4. Sind die zwei oder drei Größen, von denen eine andere abhängt, einander gleich, so steht sie zu diesen in quadratischem, kubischem Verhältniß.

Beispiele von quadratischen Verhältnissen sind:

Quadrate zu den Quadratzahlen ihrer Seiten.
Aehnliche Figuren zu den Quadratzahlen ähnlich liegender Linien.
Kreise zu den Quadraten ihrer Radien.
Kugeloberflächen zu den Quadraten ihrer Radien.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiele von kubischen Verhältnissen sind:

Würfel zu den Kubikzahlen ihrer Seiten.

Kugeln zu den Kubikzahlen ihrer Radien.

Cylinder von ungleichen Höhen und ungleichen Grundflächen verhalten sich wie die Producte aus den Quadraten der Radien und Höhen. —

5. In welchem Verhältniß Größen zu einander stehen, lehrt weder die Arithmetik noch Algebra. Sie setzt diese Verhältnisse als gegeben und bekannt voraus und empfängt sie aus den Gewohnheiten des bürgerlichen Verkehrs und aus den Gesetzen der einzelnen Wissenschaften, aus denen sie ihre Aufgaben entlehnt. —

6. Reguladetri-Aufgaben heißen diejenigen Aufgaben, in denen zu drei Gliedern einer Proportion das vierte Glied gesucht wird. Stehen die Größen, die in einer solchen Aufgabe vorkommen, in geradem Verhältniß, so heißen sie Aufgaben der directen Reguladetri oder der Reguladetri schlechtweg, stehen sie dagegen in umgekehrtem Verhältniß, so heißen sie Aufgaben der regula de tri conversa. Stehen die in der Aufgabe vorkommenden Größen in zusammengesetztem Verhältniß zu 2, 3, 4 Größen, so geben sie Aufgaben der regula quinque, septem u. s. w. oder allgemein: Aufgaben der zusammengesetzten Reguladetri. Doch sind alle diese Benennungen als unnützer Ballast über Bord zu werfen.

7. Kettenregel nennt man die Regel für den eigenthümlichen arithmetischen Rechenansatz für diejenigen Größen, deren Größenverhältniß durch mehrere bekannte Zwischenverhältnisse bestimmt werden soll.

8. Gesellschafts- oder Theilungsregel nennt man die Regel für den Ansatz von Aufgaben, welche Vertheilungen von Gewinn, Verlust, Steuern u. s. w. betreffen, die nach bestimmt vorgeschriebenen Verhältnissen und Bedingungen erfolgen sollen.

9. Mischungsregel nennt man die Regel für den Ansatz der Aufgaben, welche die Mischung verschiedener Stoffe betreffen, um aus ihnen Mischungen von bestimmter Qualität oder bestimmten Preisen herzustellen.

10. Die sämmtlichen sogenannten einfachen und zusammengesetzten Reguladetri-Aufgaben, sowie die Aufgaben der Gesellschafts-, Mischungs-, Zins-, Rabatt- und Discontrechnung werden später als algebraische Aufgaben im Leitfaden behandelt werden. Sie an dieser Stelle als Proportionsaufgaben oder als Aufgaben gleicher Quotienten zu behandeln und zu erläutern, glaubte der Verfasser aus folgenden Gründen unterlassen zu können. Einmal kann eine solche Erörterung als schon bekannt aus den Rechenstunden vorausgesetzt werden; ferner würde sie die selbstständige Thätigkeit des Lehrers zu sehr beengen. Außerdem hängt auch die Art der Lösung sehr von der größern oder geringern Verwicklung der Aufgaben ab, und nicht ein Ansatz ist für alle Aufgaben einer und derselben Klasse der bequemste. Endlich schließt sich

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

auch die Erörterung am bequemsten an die einzelnen in der Sammlung enthaltenen Aufgaben an und diese hier zu erläutern, hieße dem Schüler das eigene Nachdenken ersparen und dem Lehrer unnöthige specielle Vorschriften ertheilen. Die richtige Auffassung der Aufgaben, der rasche Ansatz und die sichere schnelle Ausrechnung hängt von der Uebung ab, welche der Schüler aus den Rechenstunden mitbringt; diese soll er in der Arithmetik nicht sich aneignen, sondern nur verstehen lernen. —

Dritter Abschnitt.

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

Gliederung des Inhalts im dritten Abschnitte.

Der dritte Abschnitt zerfällt nach den drei Hauptaufgaben der Potenzrechnung in drei Haupttheile:

a. in die Lehre von den Potenzen,
b. „ „ „ „ „ Wurzeln,
c. „ „ „ „ „ Logarithmen.

Jeder dieser drei Haupttheile zerfällt wieder in zwei Unterabtheilungen nach den beiden Aufgaben, die in Bezug auf Potenzen, Wurzeln und Logarithmen gestellt werden können. Man muß nämlich

α. mit schon gebildeten potenzirten, radicirten, logarithmirten Ausdrücken alle Rechnungsarten ausführen lernen und

β. jede Zahl, jeden Ausdruck potenziren, radiciren und logarithmiren lernen. —

Hat der Verfasser unserer Sammlung den Stoff so gegliedert? Wie und wo weicht er von dieser Gliederung ab? Was hat ihn wohl zu den Abweichungen bewogen?

A. Potenzen mit ganzen Exponenten.

§. 34.

1. Da in Potenzausdrücken zwei unabhängige Größen, Grundzahl und Exponent, vorkommen, so gibt es in Bezug auf sie:

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

a. Vollständig identische Ausdrücke, d. h. solche, in denen Grundzahl und Exponent übereinstimmen. Z. B. a^m und a^m.

b. Ausdrücke mit gleichen Grundzahlen und verschiedenen Exponenten. a^m und a^n.

c. Ausdrücke mit gleichen Exponenten und verschiedenen Grundzahlen. a^m und b^m.

d. Ausdrücke mit verschiedenen Grundzahlen und Exponenten. a^m und b^n.

An diesen vier verschiedenen Formen der Potenzausdrücke müssen wir die bis jetzt kennen gelernten Rechnungsarten ausführen. Die einzelnen §§. unseres Abschnittes enthalten die einzelnen Hauptsätze und Regeln darüber.

2. Potenzausdrücke können nur dann wirklich addirt und subtrahirt werden, wenn Grundzahl und Exponent gleich sind. In diesem Falle wird die Addition und Subtraction gar nicht an den Potenzausdrücken, sondern nur an ihren Coefficienten vollzogen und deshalb steht darüber in unserer Sammlung zur Erläuterung weder ein Satz noch Beispiele.

3. An Potenzausdrücken von verschiedenen Grundzahlen und Exponenten kann die Rechnung nur angedeutet, nicht wirklich vollzogen werden.

4. Wir haben demnach in den nächsten §§. nur Regeln für Multiplicationen, Divisionen und Potenzirungen zu erwarten, d. h. für diejenigen Rechnungsarten, die wir bisher kennen gelernt haben.

5. Potenzausdrücke von gleichen Grundzahlen mit verschiedenen Exponenten werden multiplicirt, indem man ihre Grundzahl mit der Summe der Exponenten potenzirt.

Formel: $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$.

Beweis: Da $a^m = a \,.\, a \,.\, a \ldots \overset{m}{a}$

und $a^n = a \,.\, a \,.\, a \ldots \overset{n}{a}$

so ist $a^m \,.\, a^n = a \,.\, a \,.\, a \ldots \overset{m}{a} \,.\, \overset{m+1}{a} \,.\,. \overset{m+2 \ldots m+n}{a \ldots a} = a^{m+n}$.

6. Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt, wenn man sie mit den Posten der Summe nach einander potenzirt und die Theilpotenzen multiplicirt.

Formel: $a^{m+n} = a^m \,.\, a^n$.

Beweis: Den Beweis erhält man, wenn man den Beweis zu 1 auf den Kopf stellt oder von unten nach oben liest.

7. Wie werden Ausdrücke mit gleichen Grundzahlen und Exponenten multiplicirt? Warum fehlt dieser Satz? Worin verwandelt sich demnach eine Multiplication von Potenzen mit gleichen Grundzahlen?

§. 35.

1. Potenzausdrücke von gleichen Grundzahlen und verschiedenen Expo-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

nenten werden dividirt, indem man ihre Grundzahl oder deren umgekehrten Werth mit der Differenz ihrer Exponenten potenzirt, je nachdem $m > n$ oder $n > m$ ist.

Formel: $a^m : a^n = a^{m-n} = 1 : a^{n-m}$.

Beweis: Denn $a^m = \overset{m}{a \,.\, a \,.\, a \ldots a}$

und $a^n = \overset{n}{a \,.\, a \,.\, a \ldots a}$

daher $a^m : a^n = \dfrac{\overset{m}{aaaaa\ldots.a}}{\overset{n}{aaa\,.\,.\,a}} = a^{m-n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$

je nachdem $m > n$ oder $n > m$ ist.

Was aus dem Ausdrucke $a^m : a^n$ wird, wenn $m = n$ wird, werden wir §. 39 sehen.

2. Eine Zahl wird mit einer Differenz potenzirt, indem man sie mit Minuend und Subtrahend nach einander potenzirt und mit der Potenz aus Subtrahend in die aus Minuend dividirt.

Formel: $a^{m-n} = a^m : a^n$.

Beweis: Der Beweis durch Umkehrung des Beweises in 1 zu führen wie in §. 24.

3. Welcher Satz steckt in Aufgabe 15 $x^n - y^n : x - y$? Wie heißt die allgemeine Formel für den Quotienten? Nach welchem Gesetz schreiten die Potenzen der Hauptgrößen fort? Was gilt für eine Regel in Bezug auf die Vorzeichen? Was gilt von den Coefficienten? Warum geht die Division auf?

4. Welcher Satz steckt in Aufgabe 16 $x^{2n} - y^{2n} : x - y$? Die übrigen Fragen sind wie in Nr. 15 zu stellen.

5. Welcher Satz steckt in Aufgabe 17? Die übrigen Fragen wie vorhin.

6. Warum läßt sich $x^{2n} + y^{2n}$ nicht durch $x + y$ ohne Rest dividiren? Wie würde die Formel für den Quotienten lauten? Wie würde das letzte Glied des Quotienten lauten und welches Vorzeichen würde es haben?

§. 36.

1. Potenzen von gleichen Exponenten und verschiedenen Grundzahlen werden miteinander multiplicirt, indem man das Product der Grundzahlen mit ihrem Exponenten potenzirt.

Formel: $a^m \,.\, b^m = (ab)^m$.

Beweis: Denn $a^m = \overset{m}{aa \ldots a}$

und $b^m = \overset{m}{bb \ldots b}$

daher $a^m b^m = \overset{m}{ab \,.\, ab \,.\, ab \ldots ab}$ (§. 5, a) $= ab^m$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

2. Ein Product wird mit einer Zahl potenzirt, indem man jeden seiner Factoren potenzirt und die Theilpotenzen multiplicirt.

Formel: $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

Beweis: Umkehrung des Beweises in 1.

Beide Sätze werden in der Algebra, um Ziffern- und Buchstabenausdrücke auf eine leichtere Art berechnen zu können, angewendet.

§. 37.

1. Potenzen von gleichen Exponenten werden dividirt, indem man den Quotienten der Grundzahlen mit ihrem Exponenten potenzirt.

Formel: $a^m : b^m = (a : b)^m$.

Beweis: Denn $a^m = a\, a\, a \ldots \overset{m}{a}$

und $b^m = b\, b\, b \ldots \overset{m}{b}$

daher $a^m : b^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \overset{m}{\frac{a}{b}}$ (§. 5, a) $= \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

2. Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl potenzirt, indem man Dividend und Divisor potenzirt und mit der Theilpotenz des Divisors in die des Dividenden dividirt.

Formel: $(a : b)^m = a^m : b^m$.

Beweis: Umkehrung des Beweises in 1.

3. Der umgekehrte Werth der Potenz einer Zahl ist der Potenz des umgekehrten Werthes der Zahl gleich.

Formel: $\frac{1}{b^m} = \left(\frac{1}{b}\right)^m$.

Beweis: Denn $\frac{1}{b^m} = \frac{1^m}{b^m} = \left(\frac{1}{b}\right)^m$ (1).

4. Die Potenz des umgekehrten (reciproken) Werthes einer Zahl ist dem umgekehrten Werthe ihrer Potenz gleich.

Formel: $\left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{1}{b^m}$.

Beweis: Denn $\left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{1^m}{b^m} = \frac{1}{b^m}$ (2).

Wie verhalten sich die Sätze 3 und 4 zu den Sätzen 1 und 2? Wie werden Potenzen mit ungleichen Grundzahlen und Exponenten multiplicirt und dividirt?

§. 38.

1. Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, indem man die Grundzahl mit dem Producte der Exponenten potenzirt.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Formel: $(a^x)^y = a^{xy} = a^{yx}$.

Beweis: Denn $a^x = \underset{}{a . a . a . . \overset{x}{a}}$

$$\text{daher } (a^x)^y = \left(a . a . . . \overset{x}{a}\right)^y$$
$$= a^y . a^y . a^y . . . \overset{x}{a^y}$$
$$= a^{y + y + y \, . \, . \, . \, . \, \overset{x}{y}} = a^{xy} = a^{yx}.$$

2. Eine Zahl wird mit einem Producte potenzirt, indem man sie mit seinen Factoren nach einander in beliebiger Reihenfolge potenzirt.

Formel: $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

Beweis: Umkehrung des vorigen.

Worin verwandelt sich demnach eine Potenzirung von Potenzen?

§. 39.

Potenzen mit der Basis 1, mit dem Exponenten 0, der Basis 0, mit negativem Exponenten und negativer Basis.

1. Jede Potenz von 1 ist 1.

Formel: $1^m = 1$.

2. *Jede Potenz mit dem Exponenten 0 ist 1.*

Formel: $a^0 = 1$.

Beweis: *Denn* $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$.

Der Ausdruck a^0 wird für 1 nur dann in einer Formel geschrieben werden, *wenn man in ihr auf diese Weise andeuten will*, daß irgend eine in ihr vorkommende Größe (a) durch Division mit sich selbst aus der Formel verschwunden ist. —

3. Jede Potenz der Basis 0 ist 0.

Formel: $0^a = 0$.

4. Jede Potenz mit *negativem Exponenten* ist dem umgekehrten (reciproken) Werthe derselben Potenz mit positivem Exponenten oder dem umgekehrten Werthe der Basis potenzirt mit dem positiven Exponenten gleich.

Formel: $a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$.

Beweis: Denn $a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$.

Der Satz 4 wird gebraucht, um Ausdrücke mit negativen Exponenten in solche mit positiven Exponenten und umgekehrt zu verwandeln, namentlich um Bruchformeln mit negativen Exponenten in solche mit positiven Exponenten zu verwandeln, dadurch, daß man die Potenzen mit negativen Exponenten in Zähler oder Nenner mit entgegengesetzten Exponenten in den Nenner oder Zähler setzt.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

5. Jede Potenz einer positiven Basis ist positiv.

Formel: $(+a)^{\pm n} = + a^{\pm n}$.

6. Jede gerade Potenz einer negativen Basis ist positiv.

Formel: $(-a)^{\pm 2n} = a^{\pm 2n}$.

7. Jede ungerade Potenz einer negativen Basis ist negativ.

Formel: $(-a)^{\pm(2n+1)} = -a^{\pm(2n+1)}$.

Die Beweise für die in 1 bis 7 enthaltenen Sätze sind meist so einfach, daß sie von dem Schüler selbst gefunden werden können. Was wird aus — 1 zu jeder geraden und ungeraden Potenz erhoben?

8. Die für ganze positive Exponenten aufgestellten Sätze der §§. 34 bis 38 gelten auch für den Exponenten 0 und negative Exponenten mit Berücksichtigung der Regeln über die Vorzeichen, die für algebraische Zahlen §. 26 aufgestellt sind. Der Beweis für die Gültigkeit der Sätze kann in jedem einzelnen Falle leicht dadurch geführt werden, daß man die Ausdrücke mit negativen Exponenten in solche mit positiven Exponenten verwandelt, an ihnen die Rechnung führt, und sie zuletzt in einen Ausdruck von der verlangten Form zurückverwandelt.

Beispiel: $a^{-m} : a^{+m} = a^{-m-(+n)} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$.

Beweis: Denn $a^{-m} : a^{+n} = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m\, a^n} = \frac{1}{a^{(m+n)}} = a^{-(m+n)}$

Uebergang: Wir haben in den §§. 34 bis 39 gelernt, wie man mit gegebenen Potenzausdrücken mit ganzen Exponenten rechnet, in dem folgenden §. 40 wird gezeigt werden, wie man jeden nicht gegebenen Potenzausdruck mit ganzen Exponenten finden kann.

§. 40.
Potenzirung einer Summe oder Differenz. Binomischer Lehrsatz, Newtonsches Theorem.

Vorbemerkung. Wie man die Potenz jedes Productes, jedes Quotienten und selbst jeder Potenz finden kann, ist §. 36, 37 und 38 gezeigt. Wie man jede Potenzirung durch wiederholte Multiplication ausführen kann, ergibt sich unmittelbar aus dem Begriffe der Potenzirung selbst, führt aber zu vielen unnützen Rechnungen, denn um irgend eine bestimmte Potenz berechnen zu können, müssen alle vorangegangenen niederen Potenzen schon berechnet sein. Außerdem wird bei dieser Ausführung der Rechnung nicht wirklich potenzirt, sondern nur wiederholt multiplicirt. Dieser §. soll uns daher zeigen, wie wir mit unsern bisherigen Sätzen und Hülfsmitteln die Potenz jeder Zahl und Formel unmittelbar berechnen können. Zu diesem Ende schlagen wir folgenden Weg ein.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

1. Jede Zahl, jeder vielgliedrige Ausdruck läßt sich als eine Summe oder Differenz, kurz als eine zweigliedrige Formel, als ein Binom betrachten. Haben wir demnach das Gesetz und die Regel für die unmittelbare Potenzirung eines Binom kennen gelernt, so können wir jede Zahl und jede Formel unmittelbar potenziren. Beispiele.

2. Der Lehrsatz, welcher zeigt, wie jedes Binom unmittelbar zu jeder beliebigen Potenz erhoben werden kann, heißt binomischer Lehrsatz oder seinem Entdecker zu Ehren Newtonsches Theorem.

3. Jedes noch so verwickelte Binom läßt sich auf die Form $a + b$ oder $a - b$ bringen, wenn man das erste Glied mit seinem Coefficienten durch a und das zweite ebenso durch b bezeichnet.

4. Bildet man durch wiederholte Multiplication die auf einander folgenden Potenzen von $a \pm b$, so erhält man:

I. $a \pm b$
II. $a^2 \pm 2ab + b^2$
III. $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
IV. $a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
V. $a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$
VI. $a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$ u. s. w.

5. Beobachtet man die durch wiederholte Multiplication gebildeten Potenzen genauer, so ergibt sich leicht folgendes Gesetz:

a. Jede (n) Potenz hat $n + 1$ Glieder, da jede folgende Potenz nur ein Glied mehr hat, als die vorhergehende;

b. alle Glieder sind bei einer Summenpotenz positiv, bei einer Differenzpotenz abwechselnd positiv und negativ und zwar sind die geraden Potenzen des Subtrahenden nach §. 26 positiv, die ungeraden dagegen negativ. —

c. Alle Glieder sind homogene Producte der Hauptgrößen und von der Dimension des Exponenten (n):

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-3}b^3,\ a^{n-4}b^4.$$

d. Das erste Glied der Potenz ist a^n, jedes folgende Glied nimmt im Exponenten der ersten Hauptgröße um 1 ab, dagegen im Exponenten der zweiten Hauptgröße um 1 zu; das letzte Glied ist b^n:

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2,\ a^{n-3}b^3, \ldots a^2b^{n-2},\ ab^{n-1},\ b^n.$$

e. Jedes Glied hat einen bestimmten Zahlencoefficienten (Binomialcoefficienten) vor sich, dessen Gesetz sich auch leicht aus der wiederholten Multiplication ersehen läßt. Denn läßt man die Hauptgrößen ganz weg, so sind die Coefficienten der I. Potenz

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

1 1
dazu 1 1 addirt

gibt die Coefficienten der II. Potenz 1 2 1
dazu 1 2 1 addirt

gibt die Coefficienten der III. Potenz 1 3 3 1
dazu 1 3 3 1 addirt

gibt die Coefficienten der IV. Potenz 1 4 6 4 1 u. s. w.

Beachtet man nun hiebei, daß immer die zu addirende Zahlenreihe der vorhergehenden gleich und nur um eine Stelle nach rechts gerückt ist, so erkennt man leicht folgendes Gesetz der Coefficienten. Jeder Binomialcoefficient (B) irgend einer Potenz B^n ist der Summe desselben und des vorhergehenden Binomialcoefficienten der vorhergehenden Potenz gleich.

Formel: ${}^{m}B^{n} = {}^{m}B^{n-1} + {}^{m-1}B^{n-1}$.

6. Dies Gesetz für die Bildung der Binomialcoefficienten hat aber noch die Unvollkommenheit an sich, daß man den Werth irgend eines Binomialcoefficienten nicht unmittelbar angeben kann und daß zu seiner Berechnung die vorangehenden sämmtlicher vorangehenden Potenzen erforderlich sind. Wir wollen daher versuchen, ob wir nicht durch eine schärfere und von einem andern Standpunkte aus angestellte Beobachtung der Binomialcoefficienten ein Gesetz entdecken können, wodurch sich dieselben unmittelbar berechnen lassen. Bezeichnen wir zu diesem Zweck den Potenzexponenten mit n, die Stellenzahlen der Coefficienten mit 0, 1, 2 . . . so erhalten wir folgende Tabelle der Binomialcoefficienten.

n	0	1	2	3	4	5		
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Aus dieser Tabelle ergibt sich:

a. Daß jeder *ote* und *nte* Coefficient $= 1$,

b. daß jeder 1ste und $(n-1)$te Coefficient $= n$,

c. daß die Coefficientenreihe symmetrisch ist, d. h., daß gleichweit von Anfang und Ende abstehende Glieder gleich sind und daß die ungeraden Potenzen zwei gleiche mittlere Glieder, die geraden Potenzen dagegen ein mittleres Glied haben.

d. Daß jeder 2te und $(n-2)$te Coefficient $= \frac{n \cdot n-1}{1 \quad 2}$ ist.

e. Daß „ 3 „ „ $n-3$ „ „ $= \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \quad 2 \quad 3}$ und

f. „ „ m „ „ $n-m$ „ „ $= \frac{n \cdot (n-1) \ldots n-(m-n)}{1 \quad 2 \ldots \ldots m}$.

Demnach ist die allgemeine Formel für den *n*ten Binomialcoefficienten der *n*ten Potenz:

Formel: $^{m}B^{n} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \ldots (n-m+1)}{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots (m-1) \cdot m}$.

7. Die allgemeine Binomialformel für das einfache Binomium $a \pm b$ ist demnach:

Formel: $(a \pm b)^{n} = a^{n} \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \quad 2} a^{n-2} b^{2} \ldots$

$$\frac{n}{1} a b^{n-1} \pm b^{n}.$$

Anwendungen der Binomialformel.

8. Nach der Binomialformel kann jedes andere verwickelte Binomium leicht potenzirt werden, indem man in ihr für die Hauptgrößen a und b die angegebenen Größen substituirt und nach den frühern Regeln potenzirt.

Beispiel:

$$(3m - 4n)^{5} = (3m)^{5} - 5 \cdot (3m)^{4} \cdot 4n + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} (3m)^{3} \cdot (4n)^{2} - \frac{54}{1 \cdot 2} \cdot$$

$$(3m)^{2} (4n)^{3} + 5\,3m \cdot (4n)^{4} - (4n)^{5}.$$

$$= 243 m^{5} - 1620 m^{4} n + 4320 m^{3} n^{2} - 5760 m^{2} n^{3} +$$

$$3840 m n^{4} - 1024 n^{5}.$$

9. Nach der Binomialformel kann auch eine drei- oder viergliedrige Formel potenzirt werden, wenn man zwei Glieder zu einem Gliede vereinigt.

10. Ist k eine sehr kleine in der Rechnung ohne Nachtheil zu vernachlässigende Größe, so sind um so mehr k^{2} und k^{3} unbedeutende Größen und

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

man darf daher für $(a \pm k)^2$ und für $(a \pm k)^3$ annäherungsweise $a^2 \pm 2\,ak$ und $a^3 \pm 3\,a^2k$ setzen.

Fragen: Was wird aus der Binomialformel für $(a + b)^n$, wenn $a = b = 1$ gesetzt wird? Was folgt aus ihr für die Summe aller Binomialcoefficienten? Welche Gestalt nimmt die Binomialformel für $(1 \pm x)^n$ an? Kann man durch irgend eine Operation jedes andere Binomium auf diese Form bringen und welche Gestalt nimmt dann die Binomialformel für ein so verändertes Binomium an? Wie heißen die Binomialformeln der ersten 4 Potenzen? — Für welche Exponenten ist die Gültigkeit der Binomialformel allein nachgewiesen? In welchem §. unserer Sammlung ist später noch vom binomischen Satze die Rede?

B. Wurzeln.

§. 41.

Begriff der Wurzel, Grundsatz für die Rechnung mit Wurzelgrößen.

1. Wiederholung des §. 5, *b* zur Einübung des Begriffes der Wurzel und ihrer Bezeichnung.

2. Potenzirung und Wurzelausziehung sind nach (§. 5, *b*) entgegengesetzte Rechnungsarten. Daher bleibt eine Größe ungeändert, wenn man sie mit demselben Exponenten in beliebiger Ordnung potenzirt und radicirt.

Formel: $\sqrt[x]{a^x} = (\sqrt[x]{a})^x = a.$

3. Die $\sqrt[n]{a}$ muß daher immer n mal mit sich multiplicirt werden um a zu geben. Was ist $\sqrt[1]{a}$? Welcher Wurzelexponent wird nicht geschrieben und warum nicht?

Wie heißen die Quadratwurzeln von:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100?

Wie heißen die Kubikwurzeln von:

1 8 27 64 125 216 343 512 729 1000?

§. 42.

Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten.

1. Da in Wurzelausdrücken ebenso wie in Potenzausdrücken zwei unabhängige Größen Radikand und Exponent vorkommen, so gibt es auch in Bezug auf sie

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

a. vollständig identische Wurzelausdrücke $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{a}$

b. Ausdrücke mit gleichen Radicanden $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[m]{a}$

c. Ausdrücke mit gleichen Exponenten $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$

d. Ausdrücke mit verschiedenen Radicanden und Exponenten $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$.

An diesen vier verschiedenen Formen der Wurzelausdrücke müssen wir die bisher durchgenommenen Rechnungsarten ausführen lernen.

2. Wurzelausdrücke können nur dann *addirt* und *subtrahirt* werden, wenn Radicand und Exponent gleich sind. In diesem Falle wird die Addition und Subtraction gar nicht an den Wurzelausdrücken, sondern nur an ihren Coefficienten ausgeführt und darum steht in unserer Sammlung weder ein Satz darüber noch Beispiele zur Erläuterung.

3. An Wurzelausdrücken mit verschiedenen Radicanden und Exponenten kann die Rechnung nur angedeutet, nicht wirklich vollzogen werden.

4. Wir haben demnach in den nächsten §§. nur Regeln für Multiplicationen, Divisionen, Potenzirungen und Wurzelausziehungen zu erwarten, d. h. für diejenigen Rechnungsarten, die wir bisher kennen gelernt haben. —

5. Ein Product wird radicirt, wenn man jeden Factor radicirt und die Wurzeln aus den Factoren multiplicirt.

Formel: $\sqrt[x]{ab} = \sqrt[x]{a}\sqrt[x]{b}.$

Beweis: Denn potenzirt man auf beiden Seiten mit dem Wurzelexponenten, so erhält man $ab = a.b$. Da nun diese Potenzen gleich sind, so müssen auch ihre zugehörigen Wurzelausdrücke gleich gewesen sein.

6. Wurzeln mit gleichen Exponenten werden multiplicirt, indem man das Product ihrer Radicanden radicirt.

Formel: $\sqrt[x]{a}\,\sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}.$

Beweis: Ganz wie in 5.

7. Beide Sätze in 5 und 6 sind von großer praktischer Verwendung, um große Wurzelausdrücke auf kleinere zurückzuführen, um Wurzelausdrücke auf gleiche Radicanden zu bringen, um Factoren, wie man sagt, unter das Wurzelzeichen zu schaffen und vor das Wurzelzeichen zu bringen. Den größten Nutzen gewähren sie bei der Radizirung von Producten, deren einer Factor eine vollkommene Potenz vom Wurzelexponenten, und deren anderer Factor schon radicirt und dessen Wurzel gegeben ist.

Beispiel: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 2 \,.\, 1{,}7320 \ldots$

$\sqrt{125} = 5\sqrt{5} = 5 \,.\, 2{,}2360 \ldots$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 43.

1. Ein Quotient (Bruch) wird radicirt, wenn mit der Wurzel des Divisors in die des Dividenden dividirt wird.

Formel: $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}.$

Beweis: Wie in §. 42.

2. Zwei Wurzeln mit gleichen Exponenten werden dividirt, indem man den Quotienten (Bruch) ihrer Radicanden radicirt.

Formel: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}.$

Beweis: Wie in §. 42.

3. Die Wurzel aus dem umgekehrten Werthe einer Zahl ist dem umgekehrten Werthe ihrer Wurzel gleich.

Formel: $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}.$

4. Der umgekehrte Werth einer Wurzel ist der Wurzel ihres umgekehrten Werthes gleich.

Formel: $\frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}}.$

Beweis zu 3 und 4 wie zu 1 und 2.

5. Satz 1 und 2 dienen zur bequemen Radicirung von Brüchen, deren Zähler und Nenner oder beide zugleich vollkommene Potenzen des Radicanden mit dem Wurzelexponenten sind und zur Fortschaffung der Wurzelzeichen aus den Divisoren, d. h. zu ihrer Rationalmachung.

6. Ein Bruch mit irrationalem quadratischen Nenner wird rational gemacht, wenn man Zähler und Nenner mit dem irrationalen Nenner multiplicirt.

Formel: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}\,.\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$

7. Ein Bruch mit irrationalem kubischen Nenner wird rational gemacht, wenn man ihn im Zähler und Nenner mit den fehlenden kubischen Wurzelfactoren multiplicirt.

Formel: $\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$; $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a\sqrt[3]{b}}{b}.$

Wie wird ein irrationaler Nenner von 4, 5 allgemein **n**ten Grade fortgeschafft?

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

8. Ein zweigliedriger irrationaler quadratischer Nenner von der Form $a \pm \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, in dem beide oder nur ein Glied irrational ist, wird rational gemacht, indem man Zähler und Nenner mit $a \mp \sqrt{b}$ oder mit $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ multiplicirt.

Formel: $\frac{m}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{m(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$

(vergl. §. 16).

Die angedeuteten Multiplicationen im Zähler auszuführen ist nur dann nöthig und rathsam, wenn wirklich eine Zusammenziehung stattfindet.

9. Einen drei oder viergliedrigen irrationalen quadratischen Nenner macht man rational, indem man ihn als einen zweigliedrigen Nenner betrachtet und wiederholt nach 8 behandelt.

10. Wie würde man folgende zweigliedrige kubische irrationale Nenner rational machen?

Formel: $\frac{m}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$ oder $\frac{m}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$. (vergl. §. 16).

§. 44.

1. Potenz- und Wurzelexponent können mit derselben Zahl multiplicirt und dividirt werden, ohne daß dadurch der absolute Werth des Ausdruckes geändert wird.

Formel: $\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[xn]{a^{yn}} = \sqrt[x:n]{a^{y:n}}$.

Beweis: Denn Potenzirung und Radicirung mit demselben Exponenten vorgenommen, lassen einen Ausdruck ungeändert (§. 5, b.).

2. Jeder Wurzelausdruck mit ganzen Exponenten ist einem Potenz- oder Wurzelausdruck mit gebrochenen Exponenten gleich und zwar einem Potenzausdruck, der den gegebenen Potenzexponenten zum Zähler und den Wurzelexponenten zum Nenner des Bruchexponenten hat, oder einem Wurzelausdrucke, der den gegebenen Potenzexponenten zum Nenner und den Wurzelexponenten zum Zähler des Bruchexponenten hat.

Formel: $\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}} = \sqrt[\frac{x}{y}]{a}$.

Beweis: Durch Division mit dem Wurzel- oder Potenzexponenten nach 1.

Wie verhalten sich die Exponenten in gebrochenen Potenz- und Wurzelausdrücken zu einander? Was für Brüche geben $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[5]{d}$ ...

3. Beide Sätze dienen dazu, um Wurzel- und Potenzausdrücke zu „erweitern“ oder zu „verkleinern,“ d. h. auf größere oder kleinere Exponenten zu bringen, um namentlich Wurzelausdrücke auf gleiche Exponenten zu bringen, um Potenzausdrücke zu radiciren und Wurzelausdrücke zu potenziren,

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

indem man mit dem Wurzelexponenten in den Potenzexponenten oder umgekehrt dividirt $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{a^{16}} = a^4$.

4. Eine Wurzel mit negativem Exponenten ist dem umgekehrten Werthe des Radicanden mit demselben positiven Exponenten gleich.

Formel: $$\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

Beweis: Denn $$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[-n.-1]{a^{-1}} = \sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Ein negativer Wurzel- und Potenzexponent haben demnach eine ganz ähnliche Bedeutung (vergl. §. 39).

§. 45.

Es ist einerlei, in welcher Reihenfolge Potenzirung und Radicirung an einem und demselben Ausdrucke vorgenommen werden.

Formel: $\sqrt[x]{a^y} = \left(\sqrt[y]{a}\right)^y$

Beweis: Denn potenzirt man beide Ausdrücke nach früheren Regeln mit dem Wurzelexponenten, so erhält man a^y. Da nun diese Potenzen gleich sind, so müssen auch die ursprünglichen Wurzelausdrücke gleich gewesen sein.

§. 46.

1. Eine Wurzel wird radicirt, indem man den Radicanden mit dem Producte der Exponenten radicirt.

Formel: $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Beweis: Durch Potenzirung mit dem Wurzelexponenten n wie in §. 45.

2. Mit einem Producte wird radicirt, wenn man mit seinen Factoren nach einander in beliebiger Reihenfolge radicirt.

Formel: $$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Beweis wie in 1.

Der Satz 2 dient besonders dazu, um Radicirungen mit großen zusammengesetzten Wurzelexponenten auf wiederholte Radicirungen mit kleinern Exponenten zurückzuführen. So ist z. B.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}\,;\ \sqrt[6]{b} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{b}}\,;\ \sqrt[8]{m} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{m}}}\,;$$

$$\sqrt[12]{x} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{x}}} \text{ u. s. w.}$$

§. 47.

Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

1. Potenzen mit gebrochenen Exponenten entstehen nach §. 45 aus denjenigen Wurzelausdrücken, deren Wurzelexponent nicht ohne Rest in den Potenzexponenten aufgeht.

$$\sqrt[4]{a^5} = a^{5/4} = a^{1 1/4}\,;\ \sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}.$$

2. Wurzeln mit gebrochenen Exponenten entstehen dagegen aus denjenigen Wurzelausdrücken, in denen der Potenzexponent nicht ohne Rest in den Wurzelexponenten dividirt, z. B. $\sqrt[5]{a^7} = \sqrt[5/7]{a}$. Wurzelausdrücke mit gebrochenen Exponenten sucht man zu vermeiden.

3. Jeder Potenz- oder Wurzelausdruck mit gebrochenem Exponenten läßt sich in einen Wurzelausdruck mit ganzem Exponenten verwandeln.

4. *Eine Wurzel mit gebrochenem negativen Exponenten bedeutet dieselbe Wurzel aus dem umgekehrten Werthe des Radicanden mit positivem Exponenten.*

Formel: $\sqrt[-\frac{m}{n}]{\frac{a}{b}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{b}{a}}.$

Beweis: Durch Multiplication des Wurzel- und Potenzexponenten mit dem Factor — 1.

5. Sämmtliche bisher erwiesene Sätze für Potenzen und Wurzeln mit ganzen Exponenten gelten auch für gebrochene Exponenten mit Berücksichtigung der Regeln über die Rechnung mit Brüchen und algebraischen Zahlen. Den Beweis für die einzelnen Sätze durchzuführen, halten wir für überflüssig, da der Schüler in jedem bestimmten Falle den Beweis aus dem Begriffe und der Entstehung der negativen und gebrochenen Exponenten wird leicht selbst ableiten können.

§. 48.

Ueber das Vorzeichen der Wurzel.

1. **Jede Quadratwurzel aus positiven Radicanden ist in Bezug auf ihr Vorzeichen zweideutig.**

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Formel: $\sqrt{+a^2} = \pm a$; $\sqrt{+a} = \pm\sqrt{a} = \pm a^{1/2}$.

Beweis: Denn

$$(+a)^2 = (-a)^2 = +a^2;\ (+\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = +a.$$

2. Ebenso ist allgemein jede gerade Wurzel aus einem positiven Radicanden in Bezug auf das Vorzeichen zweideutig.

Formel: $\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$.

Beweis: Wie in dem vorigen Satze.

3. Jede ungerade Wurzel aus einem negativen Radicanden ist eindeutig und negativ.

Formel: $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} = -a^{\frac{1}{2n+1}}$.

4. Jede gerade Wurzel aus einem negativen Radicanden ist weder positiv noch negativ, sondern bildet eine ganz neue Klasse von Zahlen, die imaginairen, unmöglichen, oder lateralen Zahlen. Ihren Namen imaginaire, unmögliche, Zahlen verdanken sie der einseitigen Auffassung des Zahlenbegriffes. Gauß, der ihr Wesen, ihre geometrische Bedeutung auf eine einfache Weise zuerst dargelegt hat, nennt sie laterale Zahlen, weil auch durch sie, wie durch die algebraischen Zahlen, die Richtung bezeichnet wird und zwar diejenige Richtung, welche der positiven und negativen Richtung zur Seite (lateral) liegt oder bestimmter auf ihr senkrecht steht. Im Gegensatz zu ihnen heißen alle übrigen Zahlformen reelle Zahlen. Unter den imaginairen Zahlen bilden die quadratischen die Grundformen, auf welche die übrigen zurückgebracht werden können, die in der Algebra und Analysis eine sehr wichtige Rolle spielen, mit denen die trigonometrischen Functionen in engster Verbindung stehen und deren Rechnungsregeln deshalb im nächsten §. kurz abgeleitet und erörtert werden sollen.

§. 49.

Rechnung mit imaginairen (quadratischen) Ausdrücken.

Jeder imaginaire quadratische Ausdruck soll in Zukunft vorzugsweise imaginair genannt werden, da von ihm allein die Rede sein wird.

1. Jede imaginaire Größe, zum Quadrat erhoben, ist negativ reell.

Formel: $(\sqrt{-a})^2 = -a$.

Beweis: Jede Quadratwurzel mit sich selbst multiplicirt gibt den Radicanden.

2. Jede imaginaire Größe ist einem Product aus derselben reellen quadratischen Größe und der imaginairen Einheit gleich.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Formel: $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$.

Beweis: Denn $\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \,.\, a} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{-1}$.

Die imaginaire Einheit wird darum sehr passend von Gauß mit dem Buchstaben i bezeichnet, in welchem einfachen Zeichen der Unterschied von der reellen Einheit und die Verwandtschaft mit ihr deutlich hervortritt.

3. Jedes Product zweier imaginairen Größen ist reell und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Vorzeichen der Factoren ungleich oder gleich sind.

Formel: $\pm\sqrt{-a} \,.\, \pm\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$

Formel: $\pm\sqrt{-a} \;\mp\sqrt{-b} = +\sqrt{ab}$.

Beweis: $\pm\sqrt{-a} \,.\, \pm\sqrt{-b} = \pm\sqrt{a}\sqrt{-1} \,.\, \pm\sqrt{b}\sqrt{-1} = -\sqrt{ab}$ u. s. w.

4. Jeder Quotient aus zwei imaginairen Ausdrücken mit gleichen oder ungleichen Vorzeichen ist positiv oder negativ reell.

Formel: $\pm\sqrt{-a} : \pm\sqrt{-b} = +\sqrt{a:b}$

Formel: $\pm\sqrt{-a} : \mp\sqrt{-b} = -\sqrt{a:b}$.

Beweis: $\pm\sqrt{-a} : \pm\sqrt{-b} = \pm\sqrt{.a}\sqrt{-1} : \pm\sqrt{b}\sqrt{-1} = +\sqrt{a}\sqrt{-1}$ u. s. w.

5. Jeder Quotient einer imaginairen Größe, dividirt durch eine relle, ist dem positiven Producte und dem reellen Quotienten und der imaginairen Einheit gleich.

Formel: $\sqrt{-a} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b} \,.\, \sqrt{-1}$.

Beweis: $\sqrt{-a} : \sqrt{b} = \sqrt{a}\sqrt{-1} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b} \,.\, \sqrt{-1}$.

6. Jeder Quotient aus einer reellen Größe, dividirt durch eine imaginaire, ist dem negativen Producte aus dem reellen Quotienten und der imaginairen Einheit gleich.

Formel: $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = -\sqrt{a:b} \,.\, \sqrt{-1}$.

Beweis: $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{-1} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} \,.\, \sqrt{-1}}$

$$= \frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b} \,.\, (-1)} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{-1}.$$

7. Alle ganzen positiven Potenzen von i oder $\sqrt{-1}$ haben folgende Formen:

Formel: $i^1 = +i$; $i^{4n+1} = +i$

$i^2 = -1$; $i^{4n+2} = -1$

$i^3 = -i$; $i^{4n+3} = -i$

$i^4 = +1$; $i^{4n} = +1$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beweis: $i^2 = -1$ nach 1; $i^3 = -1 \,.\, i = -i$; $i^4 = (-1)^2 = +1$; $i^5 = 1 \,.\, i = +i$ u. s. w.

8. Alle ganzen negativen Potenzen von i haben folgende Formen:

Formel: $i^{-1} = -\,i$; $i^{-(4n+1)} = -\,i$

$i^{-2} = -\,1$; $i^{-(4n+2)} = -\,1$

$i^{-3} = +\,i$; $i^{-(4n+3)} = +\,i$

$i^{-4} = +\,1$; $i^{-4n} = +\,1$.

Beweis: $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{-1} = -i$; $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{+1} = = +i \text{ u. s. w.}$$

9. Für die Rationalmachung irrationaler imaginairer Divisoren gelten die frühern in §. 43 aufgestellten Regeln mit Berücksichtigung der eben abgeleiteten Sätze über Rechnung mit imaginairen Ausdrücken.

10. Zahlen von der Form $a \pm b\sqrt{-1}$, die aus einem reellen und einem imaginairen Gliede bestehen, heißen complexe Zahlen; zwei complexe Zahlen von der Form $a + b\sqrt{-1}$ und $a - \sqrt{-1}$ heißen conjungirte Werthe, weil sie in der Algebra immer verbunden oder paarweise vorkommen.

11. Wenn zwei complexe Zahlen gleich sind, so müssen einzeln die reellen und imaginairen Glieder gleich sein.

Formel: Wenn $a \pm b\sqrt{-1} = c \pm d\sqrt{-1}$

so ist $a = c$ oder $b = d$.

Beweis: Addirt und subtrahirt man beide Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{-1} &= c + d\sqrt{-1} \\ a - b\sqrt{-1} &= c - d\sqrt{-1} \text{ so erhält man} \\ \hline 2a = 2c \text{ oder } 2b\sqrt{-1} &= 2d\sqrt{-1} \\ a = c \text{ oder } b &= d. \end{aligned}$$

12. Wenn eine complexe Zahl $= 0$ sein soll, so muß jedes Glied $= 0$ sein.

Formel: Wenn $a + b\sqrt{-1} = 0$

so ist $a = 0$ oder $b = 0$.

Beweis: Wenn $a + b\sqrt{-1} = 0$, so ist $a = -b\sqrt{-1}$.

Dies ist aber nur möglich, wenn sowohl b als $a = 0$ sind.

13. Wenn man complexe Zahlen addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt, so ist das Resultat wieder eine complexe Zahl.

1. **Formel:** $a + b\sqrt{-1} + (c - d\sqrt{-1}) = A + B\sqrt{-1}$.

Beweis: $a + b\sqrt{-1} + (c - d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b - d)\sqrt{-1}$.

Bezeichnet man nun $a + c$ mit A und $b - d$ mit B, so ist die Summe $A + B\sqrt{-1}$ von der vorgeschriebenen Form.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

2. Der Beweis für mehr als zwei Posten für die Subtraction und Multiplication zweier oder mehrerer complexen Zahlen ist ganz ähnlich zu führen.

3. **Formel:** $\frac{a + b\sqrt{-1}}{c - d\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$.

Beweis:
$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c - d\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1})}{c^2 + d^2}$$
$$= \frac{ac + bc\sqrt{-1} + ad\sqrt{-1} - bd}{c^2 + d^2}$$
$$= \frac{(ac - bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc + ad)\sqrt{-1}}{c^2 + d^2}$$
$$= A + B\sqrt{-1},$$

wenn man wie in 1. $\frac{ac - bd}{c^2 + d^2} = A$ oder $\frac{bc + ad}{c^2 + d^2} = B$ setzt.

Daß überhaupt die Resultate der Rechnung complexer Zahlen wieder complexe Zahlen geben, kann erst in der Analysis allgemein gezeigt werden.

Als Beispiel für die Rationalmachung imaginairer Zahlformen führen wir Nr. 25 der Sammlung aus.

Beispiel:

$$\frac{69 + \sqrt{-3} - 6\sqrt{-5} - 7\sqrt{15}}{3 - \sqrt{-3} + 3\sqrt{-5}} = 69 + \frac{\sqrt{-3} - 6\sqrt{-5} - 7 - \sqrt{15}}{(3 - \sqrt{-3}) + 3\sqrt{-5}}$$
$$= \frac{(69 + \sqrt{-3} - 6\sqrt{-5} - 7\sqrt{15})(3 - \sqrt{-3} - 3\sqrt{-5})}{51 - 6\sqrt{-3}}$$
$$= \frac{(69 + \sqrt{-3} - 6\sqrt{-5} - 7\sqrt{15})(3 - \sqrt{-3} - 3\sqrt{-5})(51 + 6\sqrt{-3})}{2709}$$
$$= \frac{(120 + 39\sqrt{-3} - 204\sqrt{-5} - 24\sqrt{15})(51 + 6\sqrt{-3})}{2709}$$
$$= \frac{5418 + 2709\sqrt{-3} - 10836\sqrt{-5}}{2709}$$
$$= 2 + \sqrt{-3} - 4\sqrt{-5}.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

C. Wurzeln aus Zahlen und algebraischen Summen.

§. 50.

Quadratwurzeln aus Zahlen.

1. Die Radicirung der Brüche läßt sich auf die Radicirung ganzer Zahlen zurückführen, da nach §. 43 $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

2. Die Radicirung eines Bruches läßt sich auf die Radicirung seines Zählers zurückführen, denn $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a\,b^{n-1}}}{b}$.

3. Jede ganze Zahl, deren Wurzel eine ganze Zahl, sowie jeder Bruch, dessen Wurzel wiederum ein Bruch ist, heißt eine vollständige Potenzzahl (Quadratzahl, Kubikzahl).

Von den Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
sind vollständige Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
„ „ Kuben	1	8	27	64	125	216	343	512	729,
„ „ Biquadrate	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561.

4. Die Potenz eines jeden in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruches ist ebenfalls ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch.

Formel: Sind a und b in $\frac{a}{b}$ relative Primzahlen, so sind a^n und b^n in $\frac{a^n}{b^n}$ auch relative Primzahlen.

Beweis: Sind $\alpha, \beta, \gamma,$ die Primfactoren von a oder $a = \alpha^p \beta^q \gamma^r$
und $\delta, \varepsilon,$ „ „ „ b „ $b = \delta^s \varepsilon^t$

so ist $\frac{a^n}{b^n} = \frac{\alpha^{pn}\beta^{qn}\gamma^{rn}}{\delta^{sn}\varepsilon^{tn}}$.

Da nun weder das eine noch das andere dieser Producte von Primzahlen sich durch eine andere Primzahl ohne Rest theilen läßt (§. 27), so sind auch die Potenzen $\frac{a^n}{b^n}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt.

5. Alle Potenzen von 1 sind wieder 1; alle Potenzen von Zahlen, die größer oder kleiner als 1 sind, sind größer oder kleiner als ihre Wurzeln.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beweis: Für unächte und ächte Brüche ist der Beweis leicht an einer der Formen $\frac{a+m}{a}$ und $\frac{a}{a+m}$ zu führen.

6. Hat eine ganze Zahl keine ganze Zahl oder ein Bruch keinen Bruch zur Wurzel, so hatten sie überhaupt keine genau in Zahlen angebbare Wurzel.

Beweis: Wäre die Wurzel einer ganzen Zahl ein Bruch, so müßte auch deren Potenz gegen die Voraussetzung ein Bruch (nach 4) gewesen sein. Für die Wurzel eines Bruches gilt derselbe indirecte Beweis.

7. Wurzelausdrücke aus unvollständigen Potenzen heißen daher, weil sie sich nie vollständig angeben lassen, oder weil sich ihr Verhältniß (ratio) zum Radicanden (Potenz) *nicht genau in Zahlen ausdrücken läßt, irrationale Zahlen*- oder Buchstabenausdrücke. So sind $\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b},\ \sqrt[m]{a^2b^3},\ \sqrt{2},\ \sqrt[4]{23}$ irrationale Ausdrücke. Weniger correct drückt man sich aus, wenn man von *irrationalen Zahlen spricht* oder wenn man die Näherungswerthe solcher Ausdrücke *irrational* nennt. So ist $\sqrt{2} = 1{,}4142\ \dots$ ein irrationaler Ausdruck aber 1,4142 keine irrationale Zahl.

8. Jede Zahl ist eine vollkommene Potenz, deren sämmtliche Primfactoren so oft vorhanden sind, als der Potenz- oder Wurzelexponent anzeigt. So ist 405000 eine vollständige Biquadratzahl, weil $405000 = 2^4 . 3^4 . 5^4$ ist.

9. Zwischen den *Quadraten zweier auf einander folgenden ganzen Zahlen n und n* $+ 1$ liegen immer $2n$ unvollständige Quadratzahlen.

Beweis: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
und $(n)^2 = n^2$
Daher $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ d. h. zwischen den beiden vollständigen Quadraten liegen $2n$ unvollständige. Die unvollständigen Quadratzahlen liegen daher in immer größern Zwischenräumen von einander.

10. Jede *n*ziffrige decadische Zahl ist einer *n*gliedrigen nach Potenzen von 10 fortschreitenden Formel gleich, in der die einzelnen Ziffern die Coefficienten und ihre Stellenzahlen die Exponenten von 10 sind.

So ist z. B. $\overset{2}{6}\,\overset{1}{3}\,\overset{0}{2},\overset{-1}{5}\,\overset{-2}{0}\,\overset{-3}{4} = 600 + 30 + 2 + \frac{5}{10} + \frac{0}{100} + \frac{4}{1000}$

$= 6.10^{2} + 3.10^{1} + 2.10^{0} + 5.10^{-1} + 0{,}10^{-2} + 4.10^{-3}$

11. Kommt zu irgend einer Formel (A) ein Glied (m) hinzu, so *vermehrt* sich ihr Quadrat um das Product aus diesem Gliede, multiplicirt mit der Summe des Gliedes und der doppelten Formel.

Formel: $(A+m)^2 = A^2 + (2A+m)m$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Könnte man nicht ebenso gut sagen: das Quadrat vermehrt sich um 2 Glieder? Wie würde der Satz dann lauten?

12. Das Quadrat jeder $n$gliedrigen Formel besteht

a. aus dem Quadrate des ersten Gliedes,

b. aus dem Producte des zweiten Gliedes, multiplicirt mit der Summe des zweiten und doppelten ersten Gliedes,

c. aus dem Producte des dritten Gliedes, multiplicirt mit der Summe des dritten und des Doppelten der beiden ersten Glieder,

d. aus dem Producte des vierten Gliedes u. s. w.,

e. aus dem Producte des $n$ten Gliedes, multiplicirt mit der Summe des $n$ten und des Doppelten aller vorangegangenen Glieder.

Formel:

$$(a)^2 = a^2$$

$$(a+b)^2 = +(2\,a+b)\,b = B^2$$

$$(a+b+c)^2 = +(2\,(a+b)+c)\,c = (2\,B+c)\,c = C^2$$

$$(a+b+c+d)^2 = +(2\,(a+b+c)+d)\,d = (2\,C+d)\,d = D^2.$$

Beweis: Der Grund liegt in wiederholter Anwendung von 11.

13. Aus 12 folgt,

a. daß das Quadrat jeder $n$gliedrigen Formel $n$fache Bestandtheile (Klassen genannt) enthält, von denen jeder mit Ausnahme des ersten wieder zwei Glieder, ein doppeltes Product und ein Quadrat, umfaßt,

b. daß das erste Glied des Quadrates einer $n$gliedrigen nach fallenden Potenzen einer Hauptgröße (x oder 10) fortschreitenden Formel von doppelt so hohem Range ist, als das erste Glied der Wurzel,

c. daß jeder folgende Bestandtheil eines solchen Quadrates im Range um zwei Einheiten niedriger ist, als der vorhergehende Bestandtheil,

d. daß der Bestandtheil, der als Factor x^0 oder 10^0 enthält, auch vom Range 0 ist und endlich

e. daß der Bestandtheil, der als Factor x^{-n} oder 10^{-n} enthält, vom $-2n$ Range ist,

f. daß die quadratischen Glieder sämmtlich gerade, die doppelten Producte dagegen ungerade Exponenten oder Stellenzahlen haben.

Quadrirung einer decadischen Zahl.

14. Nach der in 12 abgeleiteten und in 13 erläuterten Formel kann man leicht jede decadische Zahl quadriren, indem man, wie folgt, verfährt:

Man schreibe unter die zu quadrirende Zahl folgende verticale Reihen

a. die erste Ziffer,

b. das Doppelte der ersten Ziffer mit nachgesetzter zweiter Ziffer,

c. das Doppelte der beiden ersten Ziffern mit nachgesetzter dritter Ziffer,

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

d. das Doppelte der drei ersten Ziffern mit nachgesetzter vierter Ziffer,
e. „ „ aller vorhergehenden Ziffern mit nachgesetzter letzter Ziffer.

Dann multiplicire man jede Reihe mit ihrer letzten Ziffer und rücke jede folgende Reihe immer um 2 Stellen nach rechts. Endlich addire man alle Reihen, so ist ihre Summe das gesuchte Quadrat.

Das Komma kann entweder auf die gewöhnliche Weise bestimmt oder nach 13, *d* hinter dasjenige Product gesetzt werden, das sich aus der Multiplication mit der Ziffer gebildet hat, deren Stellenzahl *a* ist. —

Beispiel: $(324{,}629)^2$

3	=	9
62	=	134
644, . .	=	2576,
648,6 . .	=	389,16
649,22 .	=	12,9844
649,249	=	5,843241
		106383,987641

Wie hat man sich zu verhalten, wenn eine Null in der Zahl vorkommt? Wie groß muß die Anzahl der Nullen nach dem Komma sein? Wie groß kann die Anzahl der Ziffern höchstens sein? —

15. Aus der Lösung der Aufgabe für das Quadriren einer decadischen Zahl ergibt sich auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe, aus einer vollkommenen oder unvollkommenen Quadratzahl die Wurzel völlig genau oder bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit zu finden.

Ausziehung der Quadratwurzel aus einer decadischen Zahl.

16. a. Man theile die gegebenen Zahlen vom Komma aus nach rechts und links in Klassen von je zwei Ziffern und hänge nöthigenfalls zur Vervollständigung der letzten Klasse eine Null oder, falls die gegebene Zahl abgekürzt ist, die folgende geltende Ziffer an (§. 29).

b. Von der ersten Klasse ziehe man das größte vollständige Quadrat ab, so ist die Wurzel desselben die erste Ziffer der Wurzel (§. 13, b.).

c. Zu dem Reste ziehe man die zweite Klasse herunter und dividire, um die zweite Ziffer der Wurzel zu bestimmen, mit der doppelten gefundenen Wurzelziffer in die heruntergezogenen Ziffern mit Ausschluß der letzten Ziffer, bestimme jedoch den jedenfalls einziffrigen Quotienten nur so groß, daß sich die nun folgende Subtraction vollziehen läßt.

d. Den Quotienten, der die zweite Ziffer der Wurzel bildet, schreibe man hinter den Divisor, multiplicire die so vergrößerte Zahl mit

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

ihrer letzten Ziffer und ziehe dies Product von den zum Reste heruntergezogenen Ziffern der zweiten Klasse ab (§. 13, 2).

e. Zu dem Reste ziehe man die dritte Klasse herunter und dividire, um die dritte Ziffer der Wurzel zu finden, mit dem Doppelten der beiden ersten Wurzelziffern in die zum Reste heruntergezogenen Ziffern mit Ausschluß der letzten und verfahre ganz wie in c und d.

f. Zu dem Reste aus der dritten Klasse ziehe man die vierte Klasse herunter und verfahre mit ihr, sowie mit jeder folgenden Klasse wie in c und d, um die vierte und jede folgende Ziffer zu bestimmen (§. 13).

g. Geht die Rechnung auf, so ist die gegebene Zahl ein vollständiges Quadrat und die gefundene Wurzel genau; bleibt ein Rest, so hänge man beliebige Klassen von Nullen oder nachfolgenden geltenden Ziffern an, um die Wurzel auf jede verlangte Zahl von Bruchziffern zu finden.

h. Geht die in *c* oder *e* vorgeschriebene Division nicht, so zieht man zu dem Reste noch eine oder mehrere Klassen herunter, hängt der Wurzel und dem Divisor für jede heruntergezogene Klasse eine Null an und dividirt mit der so vergrößerten Zahl u. s. w.

i. Das Komma kommt hinter die Wurzelziffer zu stehen, die aus der Klasse vor dem Komma sich gebildet hat.

Beweis: Der Grund für das Verfahren liegt in 13 und zwar in den einzelnen Sätzen, welche in Parantheſe citirt sind.

Fragen: Worin hat die Klasseneintheilung ihren Grund? Warum muß von der ersten Klasse ein Quadrat subtrahirt werden? Warum muß mit der doppelten gefundenen Ziffer dividirt werden? Warum wird die letzte Ziffer jeder Klasse von der Division ausgeschlossen? Warum muß der Quotient einziffrig sein? Warum muß sich das ganze Product von der betreffenden Klasse abziehen lassen? Wo steht das Komma in der Wurzel? Warum müssen die Klassen rechts vom Komma vollzählig sein? Wie heißt die erste Wurzelziffer von $\sqrt{0{,}1}$, von $\sqrt{0{,}3}$, von $\sqrt{0{,}9}$?

Beispiel: $\sqrt{25{,}00|07|00|00|49|}\,500007$

$$\begin{array}{ll}
25 & 7\ 00\ 00\ 49 : 1000007 \\
 & \underline{7\ 00\ 00\ 49} \\
 & \qquad\qquad 0.
\end{array}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiel: $\sqrt{3 | 69 | 45, || 23 | 73 | 46 | 00 | 00} = 192,21143$

1
269 : 29
261
845 : 382
764
8123 : 3842
7684
43973 : 38441
38441
553246 : 384421
384421
16882500 : 3844224
15376896
150560400 : 38442283
115326849
Rest = 35233551 oder vollständig geschrieben
Rest = 0,0035233551.

Will man die Probe auf die Rechnung machen, so muß zu $(192,21143)^2$ der Rest 0,0035233551 addirt werden.

Abkürzung einer Wurzelausziehung nebst Bestimmung der Fehlergrenzen.

17. Ist nach der Auflösung in 16 die Wurzel auf eine bestimmte Anzahl (n) von Bruchziffern gefunden, so können noch mehrere Bruchziffern allein durch abgekürzte Division gefunden werden. Man hänge zu diesem Zwecke an den Rest eine Null oder ziehe nur die erste Ziffer der folgenden Klasse herunter, dividire in den so erweiterten Rest mit den doppelten gefundenen Wurzelziffern so lange auf abgekürzte Weise, als es angeht, so erhält man hierdurch noch mehrere zuverlässige Bruchziffern der Wurzel.

Bestimmung der Fehlergrenze. Bezeichnet man die gegebene abgekürzte Zahl mit A, ihren fehlenden Theil mit x, die gefundenen Wurzelziffern mit a und die noch fehlenden mit y, so ist $\sqrt{A + x} = a + y$ oder $A + x = a^2 + 2\,ay + y^2$ daher $A - a^2 + x - y^2 = 2\,ay$ und $y = \frac{A - a^2}{2\,a} + \frac{x - y^2}{2\,a}$ oder wenn man den Rest $A - a^2$ mit r bezeichnet $y = \frac{r}{2} + \frac{x - y^2}{2\,a}$. Dividirt man demnach den Rest mit $2\,a$, ohne das folgende unbekannte Glied zu berücksichtigen, so macht man einen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Fehler von $\frac{x - y^2}{2a}$, dessen Größe von $x - y^2$ und $2a$ abhängt. Da nun $x < 10^{-2n}$ und $y < 10^{-n}$ so ist auch $y^2 < 10^{-2n}$ und um so mehr $x - y^2 < 10^{-2n}$; der Fehler demnach jedenfalls kleiner als $\frac{10^{-2n}}{2a}$. Je größer daher $2a$ ist, desto kleiner wird der Fehler des Quotienten $\frac{10^{-2n}}{2a}$. Ist $2a > 10^3$ so ist der Fehler kleiner als $\frac{10^{-2n}}{10^3} = 10^{-2n-3} = 10^{-(2n+3)}$, d. h. die nächsten $n + 3$ Ziffern sind noch zuverlässig. Ist $2a > 10^0$, so ist der Fehler kleiner $\frac{10^{-2n}}{10^0} = 10^{-2n}$, d. h. die nächsten n Ziffern sind noch sicher.

Beispiel: Hat man die Wurzel aus 2 nach 16 berechnet, so findet man $\sqrt{2} = 1{,}414213$ und Rest $= 1590631$. Hängt man diesem Reste eine Null an und dividirt mit 2828426 in ihn auf abgekürzte Weise, so erhält man die folgenden 6 Bruchziffern, genau also $\sqrt{2} = 1{,}414213 \mid 562373\ldots$

Rechnung:

```
15906310  :  2828426
14142130      373265
 1764180 Quot.=562373
 1697056
   67124
   56568
   10556
    8485
    2071
    1980
      91
      85
       6
```

18. Wurzelausziehung aus einem Bruche.

a. Soll aus einem Bruche, der ein vollständiges Quadrat ist, die Wurzel gezogen werden, so zieht man sie aus Zähler und Nenner $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$; $\sqrt{\frac{121}{256}} = \frac{11}{16}$.

b. Soll die Wurzel aus einem Bruche gezogen werden, der kein vollständiges Quadrat ist, so verwandele man entweder den Bruch in einen Decimalbruch und radicire diesen; oder man mache den Nenner rational und dividire die Wurzel des so vergrößerten Zählers durch die Wurzel des rationalen Nenners.

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiel: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a\,b}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$; $\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

19. Alle Radizirungen, in denen der Wurzelexponent 2^n ist, können auf wiederholte Quadratwurzelausziehungen zurückgeführt werden nach §. 46.

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}} \;\cdot\; \sqrt[8]{a}\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} \quad \text{u. s. w.}$$

Auf wie viele Buchstaben muß die erste Wurzel aus a berechnet werden, wenn von $\sqrt[8]{a}$ die ersten drei Stellen genau sein sollen?

§. 51.

Quadratwurzel aus algebraischen Ausdrücken.

1. Aus einem eingliedrigen Buchstabenausdrucke läßt sich nur dann die Wurzel genau ausziehen, wenn sie sich aus dem Coefficienten und jedem Buchstabenfactor ziehen läßt (§. 42).

2. Aus einem zweigliedrigen Radicanden läßt sich die Wurzel nie genau finden, da sie weder eingliedrig noch mehrgliedrig sein kann.

3. Aus einem dreigliedrigen Radicanden läßt sich nur dann die Wurzel ziehen, wenn nach Absonderung der gemeinschaftlichen Factoren ein vollständiges Quadrat in der dreigliedrigen Formel steckt, d. h. wenn zwei Glieder vollständige Quadrate sind und das eine Glied das doppelte Product ihrer Wurzeln enthält. Wie zieht man daher die Wurzel aus einem solchen vollständigen Radicanden?

4. Um aus einem mehrgliedrigen vollständigen oder unvollständigen Quadrate die Wurzel zu ziehen, verfahre man ganz ähnlich wie bei der Wurzelausziehung aus Zahlen und vervollständige das Quadrat, um die Probe zu machen, durch den Rest.

a. Beispiel einer vollständigen Wurzelausziehung:

$$\sqrt{\left(\frac{9a^2}{16} - a^3 + \frac{109a^4}{63} - \frac{317a^5}{112} + \frac{219a^6}{98} - \frac{27a^7}{24} + \frac{81a^8}{64}\right)} = \frac{3}{4}a - \frac{2}{3}a^2 + \frac{6}{7}a^3 - \frac{9}{8}a^4$$

$$\begin{array}{l}
\frac{9a^2}{16} - a^3 + \frac{109a^4}{63} \qquad : \frac{3}{2}a - \frac{2}{3}a^2 \\
\underline{\frac{9a^2}{16}} \\
0 \\
\quad -a^3 + \frac{4}{9}a^4 \\
\hline
\qquad 0 + \frac{9}{7}a^4 - \frac{317a^5}{112} + \frac{219a^6}{98} : \frac{3}{2}a - \frac{4}{3}a^2 + \frac{6}{7}a^3 \\
\qquad + \frac{9}{7}a^4 - \frac{8}{7}a^5 + \frac{36}{49}a^6 \\
\hline
\qquad\quad 0 \quad - \frac{27}{16}a^5 + \frac{3}{2}a^6 - \frac{27}{24}a^7 + \frac{81}{64}a^8 : \frac{3}{2}a - \frac{4}{3}a^2 + \frac{12}{7}a^3 - \frac{9}{8}a^4 \\
\qquad\qquad - \frac{27}{16}a^5 + \frac{3}{2}a^6 - \frac{27}{24}a^7 + \frac{81}{64}a^8 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

b. Beispiel einer unvollständigen Wurzelausziehung:

$$\sqrt{(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)} = a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5x^3}{16a} + \frac{35x^4}{128a^2}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{a^4} \\
0 - a^3x + a^2x^2 \qquad : 2a^2 - \frac{1}{2}ax \\
\underline{-a^3x + \frac{1}{4}a^2x^2} \\
0 \quad + \frac{3}{4}a^2x^2 - ax^3 + x^4 : 2a^2 - ax + \frac{3}{8}x^2 \\
\underline{+\frac{3}{4}a^2x^2 - \frac{3}{8}ax^3 + \frac{9}{64}x^4} \\
0 \qquad - \frac{5}{8}ax^3 + \frac{55}{64}x^4 : 2a - ax + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5x^3}{16a} \\
\underline{\qquad - \frac{5}{8}ax^3 + \frac{5}{16}x^4 - \frac{15x^5}{64a} + \frac{25x^6}{256a^2}} \\
0 \qquad + \frac{35}{64}x^4 + \frac{15x^5}{64a} - \frac{25x^6}{256a^2} : 2a - ax + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5x^3}{8a}.
\end{array}$$

u. s. w.

§. 52.

Kubikwurzel aus Zahlen.

Vorbemerkung. Die Kubikwurzelausziehung aus Zahlen- und Buchstabenausdrücken kommt in der Praxis seltener als die Quadratwurzelausziehung vor, ist viel weitläufiger als diese, namentlich wenn die Wurzel auf 4, 5 und mehr Stellen gefunden werden soll und wird daher gewöhnlich mit Logarithmen vollzogen. Da jedoch der Schüler in das mechanische Verfahren bei der Wurzelausziehung überhaupt einen tiefern Blick thut, wenn er das Verfahren bei der Kubikwurzelausziehung genau kennt, so sollen die Hauptsätze über die Erhebung zum Kubus und die Regel für die Kubikwurzelausziehung in möglichster Kürze und ohne Beweis (der jedoch von dem Schüler selbst nach dem Muster des Beweises bei der Quadratwurzelausziehung geliefert werden kann) aufgestellt werden.

1. Der Kubus einer zweigliedrigen Formel besteht nach dem Binomischen Lehrsatze:

a. aus dem Kubus des ersten Gliedes;
b. aus dem Producte des dreifachen Quadrates aus dem ersten Gliede, multiplicirt mit dem zweiten Gliede;
c. aus dem Producte des dreifachen ersten Gliedes, multiplicirt mit dem Quadrate des zweiten Gliedes;
d. aus dem Kubus des zweiten Gliedes.

Formel: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. Kommt zu irgend einer Formel (A) ein Glied hinzu, so vermehrt sich ihr Kubus

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

a. um das Product des dreifachen Quadrates der Formel, multiplicirt mit dem hinzukommenden Gliede;
b. um das Product der dreifachen Formel, multiplicirt mit dem Quadrate des hinzugekommenen Gliedes;
c. um den Kubus des Gliedes.

3. Der Kubus einer $n$gliedrigen nach fallenden Potenzen von x oder 10 geordneten Formel oder Zahl besteht

a. aus dem Kubus des ersten Gliedes (Ziffer) mit einem dreifach höheren Exponenten oder Range;
b. aus dem Producte des dreifachen Quadrates des ersten Gliedes (Ziffer), multiplicirt mit dem zweiten Gliede (Ziffer) von einem um eine Einheit niedrigeren Exponenten oder Range als das erste Potenzglied;
c. aus dem Producte des dreifachen ersten Gliedes, multiplicirt mit dem Quadrate des zweiten Gliedes von einem um zwei Einheiten niedrigeren Range u. s. w.;
d. aus dem Kubus des zweiten Gliedes von einem dreifach höheren Range als das zweite Glied der Basis und einem um eine Einheit niedrigeren Range als das vorhergehende Potenzglied;
e. aus dem Producte des dreifachen Quadrates der beiden ersten Glieder, multiplicirt mit dem dritten Gliede u. s. w.;
f. aus dem Producte des dreifachen ersten und zweiten Gliedes, multiplicirt mit dem Quadrate des dritten Gliedes u. s. w.;
g. aus dem Kubus des dritten Gliedes von einem dreifach höheren Range als das zweite Glied der Basis u. s. w.;
h. aus Producten und Kuben der noch hinzukommenden Glieder, sämmtlich analog denen in e., f., und g. gebildeten.

Formel: $ax^2+bx+cx^0+dx^{-1}=a^3x^6$
$$+3a^2bx^5+3ab^2x^4+b^3x^3$$
$$+3(ax^2+bx)^2cx^0+3(ax^2$$
$$+bx)c^2x^0+c^3x^0$$

u. s. w.

Wie viele Glieder hat jede Klasse bei der Kubirung? In welchen Gliedern stecken die Kuben? Wie lautet die Kubirungsformel, wenn man in ihr überall für Glied Ziffer setzt?

4. Kubirung einer mehrziffrigen decadischen Zahl. Nach 3 kann leicht jede decadische Zahl zum Kubus erhoben werden.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Beispiel: $(\overset{1}{7}\overset{0}{6},\ \overset{-1}{3}\overset{-2}{2})^3 = \overset{3}{343}$

$$
\begin{array}{l}
343 \\
\ \ 882 \\
\ \ \ \ 756 \\
\ \ \ \ \ \ 216 \\
\ \ \ \ 51984 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 2052 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 27 \\
\ \ \ \ \ \ 3493014 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 9156 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 8^{-6} \\
\hline
444544339968^{-6}
\end{array}
$$

Wie müssen die Bestandtheile geordnet werden, wenn in der Grundzahl Nullen vorkommen? Wie wird das Komma bestimmt?

5. Kubikwurzelausziehung aus einer mehrziffrigen decadischen Zahl.

a. Man theile die gegebene Zahl vom Komma aus nach rechts und links in Klassen von je drei Ziffern und hänge nöthigenfalls zur Vervollständigung der letzten Klasse eine oder zwei Nullen (Ziffern) an.

b. Aus der ersten Klasse ziehe man den größten vollständigen Kubus ab, so ist die Wurzel desselben die erste Ziffer der Wurzel 4.

c. Zu dem Reste ziehe man die erste Ziffer der zweiten Klasse herunter und dividire, um die zweite Ziffer der Wurzel zu finden, mit dem dreifachen Quadrate der ersten Wurzelziffer in den Rest und die heruntergezogene Ziffer, bestimme jedoch den jedenfalls einziffrigen Quotienten nur so groß, daß sich die beiden folgenden Subtractionen aus derselben Klasse gleichfalls vollziehen lassen.

d. Den Quotienten, der die Ziffer der Wurzel bildet, multiplicire man mit dem Divisor und ziehe das Product von dem Dividenden ab.

e. Zu dem Reste ziehe man die zweite Ziffer der Klasse herunter und ziehe von dieser Zahl das dreifache Product aus der ersten und dem Quadrate der zweiten Wurzelziffer ab.

f. Zu dem Reste ziehe man die letzte Ziffer der Klasse herunter und ziehe von dieser Zahl den Kubus der zweiten Wurzelziffer ab.

g. Zu dem Reste der zweiten Klasse ziehe man die erste Ziffer der dritten Klasse herunter und dividire mit dem dreifachen Quadrate der beiden ersten Ziffern in den Rest und die heruntergezogene Ziffer und verfahre dann ähnlich wie in c., d., e. und f., bis sämmtliche gegebene Ziffern in Rechnung gezogen sind.

h. Geht die Rechnung auf, so ist die gegebene Zahl ein vollständiger Kubus und die Wurzel genau u. s. w., wie bei der Quadratwurzelausziehung.

Bibl. d. TU. Braunschweig

Digitale Bibliothek Braunschweig

i. Geht die in c. und g. vorgeschriebene Division nicht, so ziehe man zu dem Reste noch eine oder mehrere Klassen herunter, hänge der Wurzel eine und dem Divisor für jede heruntergezogene Klasse zwei Nullen an und dividire mit der so vergrößerten Zahl u. s. w.

k. Das Komma kommt hinter die Wurzelziffer zu stehen, die aus der Klasse vor dem Komma sich gebildet hat.

Beispiel: $$\sqrt[3]{2{,}789|000|000|000} = \overset{a\;b\;c\;d\;\ldots\ldots}{1{,}40761160.}$$

$$\begin{array}{rl}
1 & \\
\hline
17 : 3 & = 3a^2 \\
12 & = 3a^2b \\
\hline
58 & \\
48 & = 3ab^2 \\
\hline
109 & \\
64 & = b^3 \\
\hline
450000 : 588000 & = 3(a+b+c)^2 \\
411600 & = 3(a+b+c)^2 d \\
\hline
384000 & \\
20580 & = 3(a+b+c)d^2 \\
\hline
3634200 & \\
343 & = d^3 \\
\hline
36338570 : 5938947 & = 3(a+b+c+d)^2 \\
35633682 : & = 3(a+b+c+d)^2 e \\
\hline
7048880 & \\
151956 & = 3(a+b+c+d)e^2 \\
\hline
68969240 & \\
216 & = e^3 \\
\hline
68969024 & = \text{Rest.}
\end{array}$$

Wie muß der Rest vollständig seinem wahren Werthe nach geschrieben werden? Statt den Beweis zu geben, lasse sich der Lehrer ähnliche Fragen wie in §. 50, 16 beantworten.

6. Abgekürzte Kubikwurzelausziehung. Ist nach der Auflösung in 5 die Wurzel bis auf n Bruchziffern gefunden, so können noch mehrere Wurzelziffern auf eine ähnliche Weise, wie bei der Quadratwurzelausziehung durch abgekürzte Division mit dem dreifachen Quadrate der gefundenen Wurzel in dem um eine Ziffer (Null) erweiterten Rest gefunden werden.

Bestimmung der Fehlergrenze. Wählt man dieselbe Bezeichnung wie bei der abgekürzten Quadratwurzelausziehung, so ist $\sqrt[3]{A+x} = a+y$ oder $A+x = a^3y + 3a^2y + 3ay^2 + y^3$, daher $A - a^3 + x - y^3 - 3ay^2 = 3a^2y$ oder $\dfrac{A-a^3}{3a^2} + \dfrac{x-y^3}{3a^2} - \dfrac{y^2}{3a} = y$. Dividirt man demnach den Rest

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$A - a^3$ mit $3a^2$ ohne die beiden folgenden Glieder zu berücksichtigen, so macht man einen Fehler, dessen Größe von x, y und a abhängig ist. Da nun $x - y^3 < 10^{-3n}$ und $y^2 < 10^{-2n}$ so ist der Fehler $< \left(\frac{10^{-3n}}{3a^2} - \frac{10^{-2n}}{3a}\right)$. Je größer nun a ist, desto kleiner wird der Fehler. Ist z. B. $a > 10^1$ so ist $3a^2 > 10^2$ und der Fehler jedenfalls kleiner als $\frac{10^{-3n}}{10^2} - \frac{10^{-2n}}{10^1}$ $= 10^{-(3n+2)} - 10^{-(2n+1)}$, d. h. die nächsten $(n+1)$ Ziffern sind gewiß noch sicher.

Beispiel für abgekürzte Wurzelausziehung: Ist die Wurzel des in voriger Auflösung gebrauchten Beispiels bis auf vier Stellen vollständig gerechnet, so findet man durch abgekürzte Division noch die nächsten acht Ziffern, wenn man mit $3\,(1407)^2$ in den Rest 689690240 abgekürzt dividirt.

Rechnung: $689690240 : 594401328 = 1160{,}3107.$

$$\begin{array}{r}
594401328 \\ \hline
95288912 \\
59440133 \\ \hline
35848779 \\
35664079 \\ \hline
184700 \\
178320 \\ \hline
6380 \\
5944 \\ \hline
436 \\
413 \\ \hline
23
\end{array}$$

Von diesen acht gefundenen Ziffern sind noch vier sicher richtig und daher die Wurzel $= 1{,}4076\,|\,1160\ldots$

7. Die Kubikwurzelausziehung aus einem Bruche geschieht in ganz ähnlicher Weise wie bei der Quadratwurzelausziehung und bedarf daher keiner weitern Erörterung.

§. 53.

Kubikwurzelausziehung aus Buchstabenausdrücken.

$$\sqrt[3]{(125x^6 - 525x^5y + 60x^4y^2 + 1547x^3y^3 - 108x^2y^4 - 1701xy^5 - 729y^6)}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{125x^6} \\
0 \quad -525x^5y + 60x^4y^2 + 1547x^3y^3 : 75x^4 = 5x^2 - 7xy - 9y^2 \\
\quad \underline{-525x^5y + 735x^4y^2 - 343x^3y^3} \\
\quad 0 \quad -675x^4y^2 + 1890x^3y^3 - 108x^2y^4 \ldots : 75x^4 - 210x^3y + 147x^2y^2 \\
\qquad \underline{-675x^4y^2 + 1890x^3y^3 - 1323x^2y^4} \\
\qquad\qquad +1215x^2y^4 - 1701xy^5 - 729y^6 \\
\qquad\qquad \underline{+1215x^2y^4 - 1701xy^5 - 729y^6} \\
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 54.
Ausziehen höherer Wurzeln aus Zahlen- und Buchstabenausdrücken.

Höhere Wurzeln als Kubikwurzeln auszuziehen, kommt in der gewöhnlichen Praxis selten vor; ihre Ausziehung in der Schule zu lehren, würde daher ein unnützer Luxus sein. Um jedoch an einem Beispiele das Verfahren wenigstens im Allgemeinen zu erläutern, mag es genügen, den Schüler für die fünfte Wurzelausziehung folgende Fragen beantworten zu lassen, aus deren Beantwortung sich ergeben wird, ob er das allgemeine Verfahren bei jeder beliebigen anderen Wurzelausziehung eingesehen hat oder nicht.

Fragen: Wie vielgliedrig ist die fünfte Potenz jeder eingliedrigen Formel? Wie viele Glieder hat die fünfte Potenz jeder zweigliedrigen Formel nach dem Binomischen Lehrsatze? Wie viele Glieder kommen zu der Potenz einer Formel, wenn sich dieselbe um ein Glied vermehrt? Wie viele Glieder (Ziffern) enthält demnach jede Klasse? Wenn die Formel nach fallenden Potenzen von x oder 10 geordnet ist, von welchem Exponenten oder Range ist das erste, jedes folgende und das letzte Glied? Wenn umgekehrt aus einer Zahl die fünfte Wurzel gezogen werden soll, in was für Klassen ist sie zu theilen und von welcher Stelle aus? Welche Klasse muß unbedingt vollziffrig sein? Was ist von der ersten Klasse abzuziehen? Womit wird in die erste Ziffer der folgenden Klasse dividirt? Wie muß der Quotient oder die zweite Wurzelziffer beschaffen sein und wie hoch darf sie höchstens genommen werden? Welche Producte werden von den folgenden zu den Resten heruntergezogenen Ziffern abgezogen? Was wird von dem letzten Gliede jeder Klasse abgezogen? Welches ist der Divisor in die zum Reste heruntergezogene erste Ziffer jeder Klasse? Wo steht das Komma in der Wurzel? Wie würde man bei der abgekürzten Wurzelausziehung verfahren? Wie wird die Wurzel aus einem Bruche gefunden? Wie heißen die fünften Potenzen der einziffrigen Zahlen? Wie viele vollständige fünfte Potenzzahlen gibt es bis zu 1000? Wie würden diese Fragen für die sechste, siebente oder $n$te Wurzel zu beantworten sein?

§. 55.
Verwandlung der Summe zweier Quadratwurzeln in eine und umgekehrt.

In diesem §. sollen noch zwei ganz specielle quadratische Wurzelgrößen, auf die man in der Geometrie und Algebra stößt, vereinfacht werden.

Bei der Berechnung regulärer Figuren und bei der Auflösung dreigliedriger Gleichungen vom vierten Grade von der Form $x^4 + bx^2 + c = 0$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

kommt man auf Wurzelgrößen von der Form $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ und $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}.$ Die Aufgabe der Arithmetik besteht nun darin, den Versuch zu machen, solche Ausdrücke zu vereinfachen und wenigstens ein Wurzelzeichen fortzuschaffen. Zu diesem Zweck stellt sie über solche Formen einen einfachen Lehrsatz und zwei Aufgaben auf, von deren Lösung die Vereinfachung solcher Ausdrücke abhängig ist. Diesen Lehrsatz und die beiden Aufgaben enthält unser §.

1. Lehrsatz. Wenn zwei zweigliedrige gemischte quadratische Ausdrücke zu einer Gleichung verbunden sind, so müssen die rationalen und irrationalen Glieder, einzeln genommen, einander gleich sein.

Formel: Wenn $p + \sqrt{q} = p^1 + \sqrt{q^1}$
so ist $p = p^1$ und $\sqrt{q} = \sqrt{q^1}$.

Beweis: Subtrahirt man auf beiden Seiten der Gleichung p^1 und $\sqrt{q^1}$, so erhält man $(p - q^1) + \sqrt{q} - \sqrt{q^1} - 0$. Da nun die linke Seite nur zu 0 werden kann, wie leicht zu ersehen, wenn $\sqrt{q} - \sqrt{q^1} = 0$ wird, so muß auch $p - p^1 = 0$ und daher $p = p^1$ und $\sqrt{q} = \sqrt{q^1}$ sein.

2. Aufgabe. Einen zweigliedrigen gemischten quadratischen Ausdruck in einen eingliedrigen (wo möglich rationalen) zu verwandeln.

Auflösung. Soll der Ausdruck $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}$ in einen eingliedrigen von ähnlicher Form verwandelt werden, so bezeichne man denselben vorläufig mit $\sqrt{x \pm \sqrt{y}}$ um aus der Gleichung $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x \pm \sqrt{y}}$ (1) die Größen x und $\sqrt{y}$ zu bestimmen. Quadrirt man zu diesem Zwecke die Gleichung, so erhält man

$$2a \pm 2\sqrt{a^2 - b} = x \pm \sqrt{y} \quad (2)$$

und aus ihr nach 1) $2a = x$ und $2\sqrt{a^2 - b} = q$. Setzt man die Werthe für x und $\sqrt{y}$ in Gleichung (1), so erhält man

I. $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})}$

Ist in diesem Ausdrucke $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat, so wird der Ausdruck $\sqrt{a^2 - b}$ rational und enthält nur ein Wurzelzeichen, ist also ein viel einfacherer Ausdruck geworden.

3. Aufgabe. Einen eingliedrigen gemischten irrationalen quadratischen Wurzelausdruck in einen zweigliedrigen zu verwandeln.

Auflösung. Soll der Ausdruck $\sqrt{m \pm \sqrt{n}}$ in einen zweigliedrigen Ausdruck von ähnlicher Form verwandelt werden, so bezeichne man denselben vorläufig mit $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ um aus der Gleichung $\sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ (1) die Größen x und y zu bestimmen. Quadrirt man zu diesem Zweck die Gleichung (1) mit Berücksichtigung der obern und untern Vorzeichen, so erhält man

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$m \pm \sqrt{n} = x + y \pm 2\sqrt{xy} \ (2)$$

und aus ihr nach Lehrsatz (1) $m = x + y$ (3)

und $n = 4\,x\,y$ (4).

Quadrirt man die Gleichung (3) und subtrahirt von ihrem Quadrate $n = 4\,x\,y$, so erhält man

$m^2 - n = (x - y)^2$ und aus ihr $\sqrt{m^2 - n} = x - y$

Da nun auch (3) $m = x + y$

so ist $x = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n}$

$$y = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n}$$

Setzt man diese Werthe für x und y in Gleichung (1), so erhält man

II. $\sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{2}(m + \sqrt{m^2 - n})} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(m - \sqrt{m^2 - n}}$

ein Ausdruck, der gleichfalls vereinfacht wird, sobald $m^2 - n$ ein vollständiges Quadrat und $\sqrt{m^2 - n}$ rational ist.

Beispiel zu Aufgabe 2, Heis 8:

$\sqrt{8x^2 + 2x + 8x\sqrt{x}} \pm \sqrt{8x^2 + 2x - 8x\sqrt{x}}$

$= \sqrt{2(8x^2 + 2x \pm \sqrt{64x^4 + 32x^3 + 4x^2 - 64x^3}}$

$= \sqrt{2(8x^2 + 2x \pm \sqrt{64x^4 - 32x^3 + 4x^2}} = \sqrt{2(8x^2 + 2x \pm (8x^2 - 2x)}$

$= 4\,x\sqrt{2}$ $\qquad = 2\sqrt{2\,x.}$

Beispiel (1) zu Aufgabe 3. Soll $\sqrt{bc + 2a^2 + 2a\sqrt{bc + a^2}}$ in einen zweigliedrigen Ausdruck verwandelt werden, so ist $m = bc + 2a$ und $\sqrt{n} = 2a\sqrt{bc + a^2}$ daher $m^2 - n = b^2c^2$ und $\sqrt{m^2 - n} = bc$. Substituirt man diesen Ausdruck nach Formel II., so ist

$$\sqrt{bc + 2a^2 \pm 2a\sqrt{bc + a^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(bc + 2a^2 + bc)}$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(bc + 2a^2 - bc)} = \sqrt{bc + a^2} \pm a.$$

Beispiel 2 zu Aufgabe 3; Heis 32: Soll $\sqrt{6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}}$ umgeformt werden, so schließe man die beiden letzten Glieder in Klammern ein und radicire sie, so erhält man $\sqrt{6 + 2\sqrt{2} + (2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}.}$ Setzt man nun $6 + 2\sqrt{2} = m$ und $2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} = n$, so erhält man durch Anwendung der Formel II. $\sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}$ $- \sqrt{3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3}$. Wendet man auf das erste Glied dieser Formel wiederum Formel II. an, so findet man leicht die einfache Lösung $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$. —

Auf eine ähnliche Weise ist auch Beispiel 33 bei Heis zu rechnen. Etwa so:

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\sqrt{\sqrt[3]{4000}+\sqrt[6]{221184}+\sqrt[6]{1024000}+\sqrt[6]{3456000}}\ (1)$$

$$=\sqrt{\sqrt[6]{2^{10}.5^6}+\sqrt[6]{2^{13}.3^3}+\sqrt[6]{2^{13}5^6}+\sqrt[6]{2^{10}3^3.5^3}}\ (2)$$

(Durch Zerlegung der Zahlen in ihre Primfactoren und durch Reduction auf denselben Exponenten.) Durch Absonderung des gemeinschaftlichen Factors $\sqrt[6]{2^{10}}$ erhält man

$$\sqrt{\sqrt[6]{2^{10}}(\sqrt[6]{5^6}+\sqrt[6]{2^3.3^3}+\sqrt[6]{2^3.5^3}+\sqrt[6]{3^3.5^3})}$$

$$=\sqrt{2\sqrt[3]{4}(5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})}$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{4}\,(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}$$

$$=\sqrt[3]{2}\,(\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}\ (3).$$

Wendet man auf den eingeklammerten viergliedrigen Factor Formel II. an, so erhält man für ihn $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5}$ (4) und für die ursprünglich gegebene Formel $\sqrt[3]{2}\ (\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5})$ (5). Wendet man endlich auf das erste Glied des eingeklammerten Factors nochmals Formel II. an, so findet man für dasselbe $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ und daher für den ursprünglich gegebenen Ausdruck $\sqrt[3]{2}\ (\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5})$.

D. **Logarithmen.**

§. 56.

Begriff eines Logairthmus und Logarithmensystemes.

1. Begriff und Bezeichnung des Logarithmus, sowie das Verhältniß der Logarithmirung zur Potenzirung und Radicirung muß nach §. 5, c. wiederholt und an vielen Beispielen erläutert werden, wenn der Schüler das Folgende gründlich verstehen und zu seinem geistigen Eigenthum machen will. Auch muß die Identität der beiden Gleichungen $\overset{b}{\log}\, a = m$ und $b^m = a$, die in dem Begriffe des Logarithmus liegt und der man sich immer bei den Beweisen bedient, an vielen Zahlen- und Buchstabenausdrücken veranschaulicht werden.

2. $\log.\ x$ ist ein vollständig unbestimmter Ausdruck, dagegen ist $\overset{b}{\log}.\ a$ völlig bestimmt und eindeutig, wenn b und a absolute Zahlen sind.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

3. Jede Zahl hat daher nach der unendlichen Verschiedenheit der Grundzahlen auch unendlich viele Logarithmen. So ist z. B. $\overset{2}{\log}\ 64 = 8$; $\overset{4}{\log}\ 64 = 3$; $\overset{8}{\log}\ 64 = 2$.

4. Ein und derselbe Logarithmus kann nach der Verschiedenheit der Grundzahl zu unendlich verschiedenen Logarithmanden gehören. So ist z. B. $2 = \overset{3}{\log}\ 9$; $2 = \overset{9}{\log}\ 81$; $2 = \overset{10}{\log}\ 100$ u. s. w.

5. **Unter einem Logarithmensysteme** versteht man die berechneten und in einer Tafel zusammengestellten Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis n für ein und dieselbe Basis. Wir würden z. B. ein Logarithmensystem für die Basis 2 haben, wenn die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000 für diese Basis berechnet wären.

6. Von den unendlich vielen möglichen logarithmischen Systemen sind zwei berechnet, das Briggische (gemeine) und Nepersche (natürliche) System. Das erstere hat zur Grundzahl 10, das letztere 2,718 ..... Warum mit Recht, ungeachtet seiner irrationalen Basis (e), das Nepersche System das natürliche heißt, lehrt die Analysis. Für alle Rechnungen wird das Briggische System gebraucht, das daher immer stillschweigend vorausgesetzt wird und dessen Basis eben deshalb nicht speciell bezeichnet wird. Immer ist $\log a = \overset{10}{\log}\ a$.

7. Von allen Logarithmensystemen mit positiver ganzzahliger Basis gelten folgende allgemeine Sätze.

a. Der Logarithmus von Null ist negativ unendlich; oder $\overset{b}{\log}\ 0 = -\infty$, denn $b^{-\infty} = 0$.

b. Der Logarithmus von Eins ist Null; oder $\overset{b}{\log}\ 1 = 0$, denn $b^0 = 1$.

c. Die Logarithmen der vollständigen Potenzen der Grundzahl sind ganze positive oder negative Zahlen.

d. Die Logarithmen aller übrigen ganzen Zahlen sind irrationale Zahlenausdrücke, denn sie können weder ganze noch gebrochene positive oder negative Zahlen sein. Die Logarithmen solcher Zahlen sind also nur näherungsweise anzugeben.

e. Die Logarithmen aller ächten Brüche sind negativ, dagegen die der ganzen Zahlen positiv. Wie die Logarithmen der Brüche aus denen der ganzen Zahlen bestimmt werden, lehrt der folgende §.

f. Von negativen Zahlen gibt es in Systemen mit positiver Basis keine Logarithmen, da keine Basis zu irgend einer beliebigen positiven oder negativen Potenz erhoben eine negative Zahl gibt.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

8. Eins eignet sich nicht zur Basis eines Logarithmensystemes, da alle Potenzen von 1 wieder 1 sind und keine andere Zahl als Potenz von 1 erscheinen kann. Warum eignet sich keine negative Zahl zur Basis eines Logarithmensystemes?

9. Von dem Briggischen Systeme gelten folgende Sätze:

a. die Logarithmen von 1 10 100 1000 10000 in 10^n sind
0 1 2 3 4 „ n,

b. die Logarithmen aller einziffrigen, zweiziffrigen, allgemein $n$ziffrigen Zahlen liegen zwischen 0 und 1, 1 und 2, allgemein $(n - 1)$ und n.

10. Jeder Logarithmus, der keine ganze Zahl ist, besteht aus einer ganzen Zahl, die auch $= 0$ sein kann, (Charakteristik) und einem angehängten (Decimal-) Bruche (Mantisse, Ueberschuß), der nach der größern oder geringern Genauigkeit auf 7, 6 . . . . oder 3 Stellen berechnet ist.

11. Negative Charakteristiken pflegt man, um sie mehr hervorzuheben, mit dem —Zeichen hinter die Mantisse zu setzen.

12. Jeder negative Logarithmus läßt sich in einen andern mit positiver Mantisse und negativer Charakteristik verwandeln, wenn man ihn von einer größern positiven Charakteristik abzieht und dieselbe mit dem —Zeichen anhängt, denn dadurch bleibt der Logarithmus nach §. 8 ungeändert.

13. Jeder Logarithmus mit negativer Charakteristik und positiver Mantisse läßt sich in einen andern Logarithmus verwandeln, dessen Charakteristik ein Vielfaches irgend einer andern ganzen Zahl ist, wenn man zu seiner positiven und negativen Charakteristik zugleich so viele positive und negative Einheiten zusetzt, daß die negative Charakteristik die verlangte Größe erhält (§. 8). Eine Veränderung, die bei der Logarithmirung von Wurzelausdrücken angewandt werden muß.

14. Unter decadischer Ergänzung (complementum decadicum) versteht man die Ergänzung eines Logarithmus zu 10. Ist $0{,}3010300 = log\ 2$, so ist seine decadische Ergänzung $10 - 0{,}3010300 = 0{,}6989700 = c\,.\,d\,.\,log\ 2$; ist $0{,}3478497 - 3 = log\ N$, so ist $10 - (0{,}3478497 - 3) = 13 - 0{,}3478497 = 12{,}6521503 = c\,.\,d\,.\,log\ N$.

§. 57.

Logarithmische Sätze.

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten folgende fünf Sätze:

1. Der Logarithmus eines Productes ist der Summe der Logarithmen seiner Factoren gleich.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Formel: $\log(a\,.\,b) = \log a + \log b.$

Beweis: Setzt man $\log a = x$ und $\log b = y$,

so ist $a = 10^x$

und $b = 10^y$

daher $ab = 10^{x+y}$

oder $\log(ab) = x + y = \log a + \log b.$

2. Der Logarithmus eines Quotienten (Bruches) ist der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden (Zählers) weniger dem Logarithmus des Divisors (Nenners) gleich.

Formel: $\log(a : b) = \log a - \log b.$

Beweis: Dem Beweise in 1 ähnlich zu führen.

3. Der Logarithmus einer Potenz ist dem Producte aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Grundzahl gleich.

Formel: $\log(a^m) = m\,.\log a.$

Beweis: Ist $\log a = x$

so ist $a = 10^x$

daher $a^m = (10^x)^m = a^{mx}$

oder $\log a^m = mx = m \log a.$

4. Der Logarithmus einer Wurzel ist dem Quotienten und dem Logarithmus des Radicanden, dividirt durch den Exponenten, gleich.

Formel: $\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}.$

Beweis: Dem Beweise in 3 ähnlich zu führen.

5. Der Logarithmus irgend einer Zahl n für eine beliebige Basis b ist dem Quotienten aus dem Briggischen Logarithmus von n, dividirt durch den Briggischen Logarithmus der Basis b, gleich.

Formel: $\overset{b}{\log}\, n = \frac{\log n}{\log b}.$

Beweis: Setzt man $\overset{b}{\log}\, n = x$,

so ist $b^x = n$ daher nach 3, $x \log b = \log n$

und $x = \frac{\log n}{\log b} = \overset{b}{\log}\, n.$

6. Aus den ersten vier Sätzen folgt, daß

a. die Logarithmirung eines Productes durch Addition,

b. „ „ „ Quotienten durch Subtraction,

c. „ „ einer Potenz durch Multiplication,

d. „ „ eines Wurzelausdrucks durch Division vollzogen wird.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

7. Aus 5 folgt, daß durch einfache Divisionen aus einem schon berechneten Systeme jedes beliebige andere System berechnet werden kann, daß also ursprünglich nur ein System berechnet zu werden braucht.

8. Die Logarithmen aller ächten Brüche sind negativ.

9. Mit Logarithmen können große Multiplicationen, Divisionen, Potenzirungen, Radicirungen bequem vollzogen werden, wenn man eine gut eingerichtete genau berechnete Logarithmentafel besitzt, mit deren Hülfe man zu jeder Zahl den Logarithmus und zu jedem Logarithmus die zugehörige Zahl finden kann.

10. Den Logarithmus einer Summe oder Differenz kann man dagegen mit den gewöhnlichen Tafeln nicht aus den Logarithmen ihrer Glieder bestimmen und daher heißen Summen und Differenzen passend unlogarithmische Ausdrücke. $a^2 - b^2$ ist auch ein unlogarithmischer Ausdruck, aber durch Verwandlung in $(a + b)(a - b)$ läßt er sich in einen bequemen logarithmischen Ausdruck verwandeln.

11. Will man den Logarithmus einer Summe oder Differenz $(a \pm b)$ aus den in der Rechnung schon vorkommenden Logarithmen ihrer Glieder finden, so muß man sich die Summe oder Differenz in ein Product oder einen Quotienten von der Form $a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ oder $1 - \frac{a}{1 - \frac{b}{a}}$ verwandelt denken. Wenn dann $a > b$, so ist $log\left(a(1+\frac{b}{a})\right) = log\, a + log\left(1+\frac{b}{a}\right)$ und $log\,(a - b) = log\, a - log\, \frac{1}{1 - \frac{b}{a}}$. Hat man nun eine Tafel, in der z. B. aus den Logarithmen von a und b bequem $log\left(1 + \frac{b}{a}\right) = A$ bestimmt werden kann, so ist $log\,(a + b) = log\, a + A$. Auf diesem Principe beruht die Berechnung und Einrichtung der sogenannten Gauß'schen oder Additions- und Subtractionslogarithmen. Ihre Einrichtung und ihren Gebrauch näher kennen zu lernen muß dem Privatfleiße des Schülers überlassen werden, da sie in den gewöhnlich vorkommenden Rechnungen nur sehr selten Anwendung finden. Die Trigonometrie wird später noch einen andern Weg zeigen, solche unlogarithmische Ausdrücke in logarithmische zu verwandeln.

§. 58.

Berechnung, Einrichtung und Gebrauch der Tafeln.

Vorbemerkung. Die Logarithmen aller ganzen positiven Zahlen bis 100000 und darüber hinaus sind längst bis zu der größten erforderlichen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Genauigkeit berechnet und in Hunderten von größern und kleinern Tafeln zusammengestellt. Weder Schüler noch Lehrer noch sonst irgend ein Mathematiker oder Praktiker hat für den gewöhnlichen Gebrauch Logarithmen zu berechnen nöthig; Dank und Ehre darum den ersten Berechnern Briggs, Neper, Blacq, Byrga, deren Namen allein wegen dieses Verdienstes um die mathematischen Wissenschaften nie in Vergessenheit gerathen werden. Um jedoch den Schülern den dornenvollen und mühsamen Weg anschaulicher zu zeichnen, den die ersten Berechner meistens eingeschlagen haben, um die Logarithmen zu berechnen, weil ihnen bequemere Methoden unbekannt waren, sollen in den nächsten Sätzen kurz die Hauptpunkte der Berechnung einer Logarithmentafel angedeutet werden.

Berechnung einer Logarithmentafel.

1. Um die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis zu einer bestimmten Grenze zu berechnen, braucht man nur die Logarithmen der Primzahlen bis zu dieser Grenze zu berechnen, da der Logarithmus jeder zusammengesetzten Zahl durch Addition (nach §. 57, 1, 3) aus den Logarithmen ihrer Primfactoren und der Logarithmus eines jeden Bruches durch Subtraction aus den Logarithmen seines Zählers und Nenners bestimmt werden kann. So ist z. B. $log.\ 360 = log.\ (2^3 . 3^2 . 5) = 3\ log.\ 2 + 2\ log.\ 3 + log.\ 5$ und $log.\ {}^3/_7 = log.\ 3 - log.\ 7$.

2. Um den Logarithmus einer Primzahl zu berechnen, haben die Mathematiker in Verlauf der drei letzten Jahrhunderte verschiedene Methoden gefunden und angewandt, die auf wiederholten Wurzelausziehungen, auf Verwandlungen der Logarithmen in Kettenbrüche oder Theilbruchreihen oder auf der Summirung von convergenten unendlichen Reihen beruhen.

3. Die einfachste, freilich auch zugleich umständlichste Methode, den Logarithmus einer Primzahl auch nur auf 4 oder 5 Bruchstellen zu finden, ist folgende:

Man suche die beiden benachbarten Potenzen der Basis auf, zwischen denen die Zahl, deren Logarithmus gesucht wird, enthalten ist, und deren Logarithmen bekannt und ganze Zahlen sind. Zu diesen beiden Potenzen suche man das geometrische, sowie zu ihren Logarithmen das arithmetische Mittel, so hat man dadurch die Zahl und ihren Logarithmus zwischen zwei engere Grenzen gebraucht. Von den neuen Grenzen und ihren Logarithmen berechne man wieder das geometrische und arithmetische Mittel, um noch engere Grenzen zu finden. Auf diese Weise fahre man fort, geometrische und arithmetische Mittel zwischen immer engern Grenzen zu suchen bis man zu logarithmischen Grenzwerthen kommt, die in der geforderten Anzahl von Ziffern übereinstimmen; so sind die übereinstimmenden Ziffern der gesuchte Logarithmus.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Berechnungstabelle von *log* 37 bis auf drei Bruchstellen.

Grenzen	deren Logarithmen	geometr. Mittel	des. Logarithmus.
10 100	1 2	= 31,622727	1,5
31,622727 100	1,5 2	= 56,244133	1,75
31,622727 56,234133	1,5 1,75	= 42,169650	1,625
31,622727 42,169650	1,5 1,625	= 36,517513	1,5625
36,517413 42,169650	1,5625 1,625	= 39,241897	1,59375
36,517413 39,241897	1,5625 1,59375	= 37,855152	1,578125
36,517413 37,855152	1,5625 1,578125	= 37,180266	1,570313
36,517413 37,180266	1,5625 1,570313	= 36,847349	1,566406
36,847349 37,180266	1,566406 1,5703125	= 37,013433	1,568359
36,847349 37,013433	1,566406 1,568359	= 36,930297	1,567328
36,930297 37,013433	1,567383 1,568359	= 36,971841	1,567871
36,971841 37,013433	1,567871 1,568359	= 36,99263	1,568115
36,99263 37,013433	1,568115 1,568359	= 37,00302	1,568237

4. Hätte man auf diese Weise die Logarithmen der Primzahlen unmittelbar berechnet, so ließen sich aus ihnen die Logarithmen der übrigen Zahlen leicht mit Anwendung von 1 finden. Sind die Logarithmen berechnet, so ist die Einrichtung der Tafel, in der sie zum praktischen Gebrauch zusammen gestelltsind, von der größten Wichtigkeit.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Einrichtung der größeren Tafeln.

5. Die größeren in Deutschland jetzt am häufigsten gebrauchten Tafeln sind:

a. Sammlung mathematischer Tafeln von Dr. J. A. Hülße. Leipzig 1849, Weidmann'sche Buchhandlung (Preis 3 Thlr. 15 Gr.). Als neue Auflage der größern Vega'schen Tafeln erschienen.

b. Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 — 108000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten u. s. w. von 10 zu 10 Secunden, nebst einer Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile von Dr. L. Schrön. Braunschweig 1860, Fr. Vieweg und Sohn. (Preis 1 Thlr 22½ Gr., ohne die Interpolationstafel 1 Thlr. 7½ Gr.)

c. Georg Freiherr von Vega's logarithmisches trigonometrisches Handbuch, 40. Aufl. u. s. w., bearbeitet von Dr. C. Bremiker. Berlin 1856, Weidmann'sche Buchhandlung (Preis 1¼ Thlr.).

d. Heinr. Köhler's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch u. s. w. nebst goniometrischen Formeln und einigen andern mathematischen Tafeln. Leipzig 1857, Tauchnitz. (Preis 27 Ngr.)

Die specielle Einrichtung der einzelnen Tafeln lernt der Schüler am leichtesten durch mündliche Unterweisung kennen. In den folgenden Sätzen sollen die wesentlichen Punkte aus der Einrichtung aller größeren Tafeln hervorgehoben werden.

6. Die oben angeführten größeren Tafeln haben im Wesentlichen folgende Einrichtung. Sie enthalten:

a. Die Logarithmen aller fünfziffrigen ganzen Zahlen in siebenziffrigen Mantissen entweder ohne die Charakteristik oder für die ein-, zwei-, dreiziffrigen Zahlen mit der Charakteristik.

b. Die Differenzen der Logarithmen je zweier benachbarten fünfziffrigen Zahlen und die zu ihnen zugehörigen unter ihnen stehenden Proportionaltheile der logarithmischen Differenz, die für Zehntel und Hundertel der kleinern Zahl zu ihrem Logarithmus noch hinzu zu rechnen sind. Ist z. B. 296 Zehnmilliontel die Differenz zwischen den Logarithmen zweier benachbarten fünfziffrigen Zahlen, so kommen von ihr, wenn die kleinere Zahl sich um 0,47 vermehrt, für 0,4 von der Differenz 118,4 und für 0,07 noch 20,72 hinzu.

P. P.	
	296
1	29,6
2	59,2
3	88,8
4	118,4
5	148,0
6	177,6
7	207,2
8	236,8
9	266,4

c. Die Hinzuzählung der Proportionaltheile, um die Logarithmen von sechs- und siebenziffrigen Zahlen zu bestimmen, stützt sich auf den

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Satz, daß die logarithmischen Differenzen benachbarter fünfziffriger Zahlen, in den ersten acht Bruchziffern, also um so mehr in den ersten sieben Bruchziffern constant sind.

Beweis: Sind $n, (n+1)$ $(n+2)$ drei benachbarte fünfziffrige Zahlen und $log\,n$, $log\,(n+1)$ $log\,(n+2)$ ihre Logarithmen, so ist $log\,(n+1) - log\,n = log\,\frac{n+1}{n}$ und $log\,(n+2) - log\,(n+1) = log\,\frac{n+2}{n+1}$. Zieht man die beiden Quotienten $\frac{n+1}{n}$ und $\frac{n+2}{n+1}$ von einander ab, so erhält man $\frac{1}{n\,(n+1)}$ als Differenz. Ist diese Differenz nun in den ersten acht Ziffern constant, so ist es auch die Differenz von $log\,(n+1) - log\,n$ und $log\,(n+2) - log\,(n+1)$. Die kleinsten auf einander folgenden fünfziffrigen Zahlen sind 10000, 10001 und 10002, also die Differenz der Quotienten

$$\frac{10001}{10000} - \frac{10002}{10001} = \frac{1}{10000\,.\,10001} = 0{,}000000009\ldots$$

d. h. in den ersten acht Ziffern constant, also auch die Differenz ihrer Logarithmen. Wachsen demnach fünf- und mehrziffrige Zahlen um Zehntel, Hundertel, so wachsen auch ihre Logarithmen um Zehntel, Hundertel der constanten Differenz.

Gebrauch der Tafeln.

7. Bei allen logarithmischen Rechnungen müssen mit Hülfe der Tafeln zwei Aufgaben gelöst werden:

A. Den Logarithmus zu einer gegebenen Zahl,

B. die Zahl zu einem gegebenen Logarithmus zu suchen.

Beide Aufgaben lernt der Anfänger ebenfalls am besten durch mündliche Unterweisung oder auch aus den Einleitungen zu den Tafeln kennen. Hier sollen nur die wesentlichen Punkte ganz kurz hervorgehoben werden.

A. Bei Aufsuchung des Logarithmus zu einer Zahl beobachte man folgendes Verfahren:

a. Die Charakteristik des Logarithmus wird allein durch die Stellung des Komma bestimmt, die Ziffernfolge in der Mantisse dagegen durch die Ziffernfolge der Zahl, da jede Zahl mit dem Komma an irgend einer Stelle (n) von rechts an gerechnet, als ein Quotient der Zahl ohne Komma dividirt durch 10^n erscheint. Bezeichnet Z die Zahl mit dem Komma und Z' die Zahl ohne Komma, so ist

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$Z = \frac{Z'}{10^n} \text{ und } log\, Z = log\, Z' - n\, log\, 10 = log\, Z' - n \text{ d. h.}$$

die Mantisse bleibt ungeändert und nur die Charakteristik wird um n Einheiten verkleinert.

b. Die positive Charakteristik des Logarithmus für decadische Zahlen, die größer als 1 sind, ist $n - 1$, wenn die Zahl n ganze Ziffern hat; die negative Charakteristik für die Logarithmen ächter decadischer Brüche ist der Anzahl der Nullen gleich, die den geltenden Bruchziffern vorangehen, die Null an der Stelle der Einer mitgezählt. Warum?

c. Die Mantissen der Logarithmen zu ein- bis fünfziffrigen Zahlen findet man unmittelbar in den Tafeln, die Mantissen dagegen zu sechs- und siebenziffrigen Zahlen mit Hülfe der Proportionaltheile. Bei mehr als siebenziffrigen Zahlen kann über die Tafelgrenze hinaus die Mantisse nicht bestimmt werden.

d. Die Logarithmen gemeiner ächter Brüche, die nach (§. 57) gefunden werden und negativ sind, werden mit Anwendung von (§. 56, 12) in Logarithmen mit positiver Mantisse und negativer Charakteristik verwandelt.

e. Hat man einen Logarithmus mit negativer Charakteristik mit irgend einer Zahl zu multipliciren, so multiplicire man beide Theile und bringe die positive und negative Charakteristik auf den kleinsten Ausdruck. Ist dagegen ein solcher Logarithmus durch irgend eine Zahl zu dividiren, die nicht in die Charakteristik ohne Rest dividirt, so erweitere man beide Charakteristiken bis die Division sich ohne Rest an der negativen Charakteristik vollziehen läßt (§. 56, 13).

B. Bei Aufsuchung der Zahl zu einem gegebenen Logarithmus beachte man, daß die Aufgabe die Umkehrung der vorigen ist und daß demnach das Verfahren bei ihr das umgekehrte des vorigen Verfahrens sein muß.

a. Die Stellung des Komma in der Zahl wird unabhängig von den Tafeln durch die positive oder negative Charakteristik bestimmt, die Ziffernfolge der Zahl dagegen durch die Ziffernfolge der Mantisse.

b. Die Zahl hat $n + 1$ ganze Ziffern, wenn die Charakteristik n positive Einheiten hat; die Zahl hat vor ihren geltenden Bruchziffern noch n Nullen, die Null vor dem Komma eingeschlossen, wenn die Charakteristtk n negative Einheiten hat.

c. Die ersten fünf Ziffern der gesuchten Zahl, die zu der gegebenen Mantisse gehören, findet man unmittelbar aus den Tafeln, die sechste und siebente Ziffer dagegen mit Hülfe der Proportionaltheile. Auf mehr als sieben Ziffern kann die Zahl aus ihrem Logarithmus nicht bestimmt werden.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 59.

Logarithmirung und Berechnung gegebener Ausdrücke mit Hülfe der Tafeln.

1. Der Logarithmirung selbst der verwickeltsten Zahlen- und Buchstabenausdrücke hat für den Anfänger, der die logarithmischen Sätze in §. 57 gefaßt hat, selten Schwierigkeiten, wenn er sich daran gewöhnt, jeden vorliegenden Ausdruck recht sorgfältig in die einzelnen arithmetischen Operationen, aus denen er sich gebildet hat, zu zerlegen. Das dabei zu beobachtende Verfahren wird sich einfach und anschaulich an einem vorliegenden verwickelten Ausdrucke erklären lassen.

2. **Beispiel**: Soll der Ausdruck $\sqrt[r]{\dfrac{\frac{m}{a^m}\sqrt{b^3 \cdot c^{-\frac{2}{3}}}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \sqrt[3]{c d^4}}}$ logarithmirt werden, so bezeichne man den Radicanden mit $\frac{A}{B}$; denn ist

$$log \sqrt[r]{\frac{A}{B}} = \frac{1}{r}\ (log\ A - log\ B)$$ nach §. 57 (2). Da nun

$$log\ A = \frac{m}{n}\ log\ a + \frac{3}{2}\ log\ b - \frac{2}{3}\ log\ c$$ und

$$log\ B = 2\ (log\ a - log\ b) + \frac{1}{3}\ (log\ c + 4\ log\ d);$$ so ist

$$\frac{1}{r}(log A - log B) = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{m}{n}\ log\ a + \frac{3}{2}\ log\ b - \frac{2}{3}\ log\ c\right) - \left[2(log a - log b) + \frac{1}{3}\ (log\ c + 4\ log\ d)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{m}{n}\ log\ a + \frac{3}{2}\ log\ b - \left[\frac{2}{3}\ log\ c + 2\,(log\ a - log\ b) + \frac{1}{3}\left(log\ c + 4\ log\ d\right)\right]\right]$$

3. **Beispiel**· Ist der Zahlenausdruck $\sqrt[3]{\dfrac{32{,}45^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[2]{64{,}35}}{\frac{3}{4} \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{6}{7}\right)^2}}}$ zu logarithmiren, so erhält man leicht durch eine ähnliche Zergliederung den logarithmischen entsprechenden Ausdruck

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} log\ 32{,}45 + \frac{1}{2}\ log\ 64{,}35 - ((log\ 3 - log\ 4) + \frac{2}{5}\ log\ \frac{6}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}\ log.\ 32{,}45 + \frac{1}{2}\ log\ 64{,}45 + log\ 4 - (log\ 3 + \frac{2}{5}(lg 6 - lg 7))\right]$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

4. Bei der Berechnung eines verwickelten Zahlenausdrucks mit Logarithmen versäume man nicht, a. den gegebenen Ausdruck sorgfältig zu logarithmiren und die logarithmische Formel gleichfalls aufzuschreiben, um keine verlangte Operation zu übersehen. Hierauf schlage man b. in den Tafeln sämmtliche in der Rechnung vorkommende Logarithmen auf und nehme die mit jedem Logarithmus nöthigen Rechnungen vor. Dann stelle man c. die geforderte logarithmische Rechnung an und schlage endlich d. zu dem Resultate der logarithmischen Rechnung die zugehörige Zahl auf.

5. **Beispiel**: Soll das Beispiel 18 unserer Sammlung mit Logarithmen ausgerechnet werden, so ist

$$\log\left((12{,}34^{5,67} . 8{,}9^{-2,345}) : (67{,}89^{1,23} . 45{,}67^{-8,9})\right)$$
$$= 5{,}67 \log 12{,}34 - 2{,}345 \log 8{,}9 - 1{,}23 \log 67{,}89 + 8{,}9 \log 45{,}67$$

$$\begin{array}{l|l}
\log 12{,}34 = 1{,}0913152 & \\
\log 8{,}9 = 0{,}9493900 & \\
\log 67{,}89 = 1{,}8318058 & \\
\log 45{,}67 = 1{,}6596310 & \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\log a = 6{,}1877572 \\
+\log d = 14{,}7707159 \\
\hline
\log a + \log d = 20{,}9584731 = \log A
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr|l|}
5{,}67 & \log 12{,}34 = 6{,}1877572 & = a \\
2{,}345 & \log 8{,}9 = 2{,}2263195 & = b \\
1{,}23 & \log 67{,}89 = 2{,}2531212 & = c \\
8{,}9 & \log 45{,}67 = 14{,}7707159 & = d
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\log b = 2{,}2263196 \\
\log c = 2{,}2531212 \\
\hline
\log c + \log bc = 4{,}4794402 = \log B \\
\log A = 20{,}9584731 \\
\log B = 4{,}4794402 \\
\hline
\log A - \log B = 16{,}4790323 = \log x \\
x = 301323000000000000.
\end{array}$$

6. **Beispiel**: Soll das Beispiel in 30 unserer Sammlung gerechnet werden, so ist

$$\begin{array}{r|l}
a = 4{,}26 & \log a = 0{,}6294096 \\
b = 3{,}58 & \log b = 0{,}5538830 \\
c = 2{,}13 & \log c = 0{,}3283796 \\
\hline
 & \log a + \log b + \log c = 1{,}5116722 \text{ und} \\
 & 2 \log (a + \log b + \log c) = 3{,}0233444
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|r|l}
ab = 15{,}2508 & & ab + ac + bc = 31{,}9500 = A & \log A = 1{,}5044709 \\
ac = 9{,}0738 & \text{und} & ab + ac - bc = 16{,}6992 = B & \log B = 1{,}2226957 \\
bc = 7{,}6254 & & ab - ac + bc = 13{,}8024 = & \log\ = 1{,}1399546 \\
 & & -ab + ac + bc = 1{,}4484 = D & \log D = 1{,}1608885 \\
\hline
\end{array}$$

$$\log A + \log B + \log C + \log D = 4{,}0280097$$
$$\text{und } \frac{\log A + \log B + \log C + \log D}{2} = 2{,}0140048$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Da nun $log \dfrac{a^2 b^2 c^2}{\sqrt{\underset{(A)}{(ab+ac+bc)}\,\underset{(B)}{(ab+ac+bc)}\,\underset{(C)}{(ab+ac+bc)}\,\underset{(D)}{(-ab+ac+bc)}}}$

$$=2\,(log\ a+log\ b+log\ c)-\frac{1}{2}\,(log\ A+log\ B+log\ C+log\ D)$$

und $2\,(log\ a+log\ b+log\ c)=3{,}0233444$

sowie $\frac{1}{2}\,(log\ A+log\ B+log\ C+log\ D)=2{,}0140048$ ist,

so ist $2\,(log\ a+log\ b+log\ c)-\frac{1}{2}\,(log\ A+log\ B+log\ C+log\ D)$

$$=1{,}0093396=log\ x=10{,}21738.$$

7. Bei jeder logarithmischen Rechnung können die Subtractionen von Logarithmen vermieden und durch die Additionen ihrer decadischen Ergänzung ersetzt werden, wenn man für jede addirte decadische Ergänzung die Charakteristik um 10 vermindert.

Beweis: Denn $log\ a - log\ b = log\ a + 10 - log\ b - 10 = log\ a + c\,.\,d\ log\ b - 10.$

Besonders vortheilhaft ist der Gebrauch der decadischen Ergänzung, wenn dieselbe unmittelbar statt des Logarithmus aus den Tafeln entnommen werden kann.

Anhang zu den drei ersten Abschnitten.

Ueber Zahlensysteme und das Rechnen mit systematischen Zahlen.

1. Von dem Begriffe eines Zahlensystemes, seiner Grundzahl, sowie von den Vortheilen, welche für die Zahlenbezeichnung ein System mit einer größern Grundzahl vor dem mit einer kleinern Grundzahl voraus hat, ist schon in den Vorbegriffen (10) geredet. Mit systematischen d. h. decadischen Zahlen haben wir bisher immer gerechnet und stillschweigend bei allen Rechnungen vorausgesetzt, daß nicht nur alle zu ihnen gegebenen Zahlen decadische seien, sondern ebenso stillschweigend gefordert, daß die Resultate gleichfalls in decadischen Zahlen ausgedrückt werden.

2. Um diese, uns in Bezug auf das decadische Zahlensystem ganz geläufigen Begriffe, zu allgemeinerer Bedeutung und größerer Klarheit zu erheben, sollen die Regeln für die Bezeichnung, Verwandlung und Rechnung

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

mit systematischen Zahlen im Allgemeinen kurz angegeben und an Beispielen erläutert werden.

3. Jedes Zahlensystem bildet höhere und niedere Einheiten nach den positiven und negativen Potenzen seiner Grundzahl. Ist x die Grundzahl, so sind die höheren und niederen Einheiten x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, x^3, x^2, x^1, x^0, x^{-1}, $x^{-2} \ldots x^{-n}$ und die Haupteinheit ist x^0.

4. Jede systematische Zahl ist nach der Anzahl ihrer Ziffern eigentlich ein Monom, Binom, Polynom, in dem die einzelnen Glieder nach fallenden Potenzen der Grundzahl fortschreiten und die einzelnen Ziffern die zu ihnen gehörenden Coefficienten bezeichnen. Die Potenzen der Grundzahl werden jedoch nicht geschrieben, sondern nur durch die Stelle, welche jeder Coefficient (jede Ziffer) einnimmt, angedeutet. Ist x die Grundzahl und sind a, b, c u. s. w. die auf einander folgenden einfachen Ziffern des Systems, so ist die allgemeine Form einer solchen systematischen Zahl

$$bx^n + cx^{n-1} + \ldots . ox^2 + fx^1 + gx^0 + ax^{-1} \ldots + dx^{-n}$$
$$= bc \ldots\ldots . ofg, a \ldots . . d.$$

Sind einzelne Coefficienten (Ziffern) Null, so fallen ihre Glieder eigentlich aus; an ihrer Stelle erscheint aber dann die Null mit Recht, um dies Ausfallen anzudeuten und den Stellenwerth jeder einzelnen Ziffer unverändert zu erhalten.

5. Jedes Zahlensystem hat zu seiner Zahlenbezeichnung nur so viele Grundziffern nöthig, als die Grundzahl anzeigt, die Null mit eingeschlossen.

6. Jede systematische Zahl, der eine kleinere Basis als 10 zu Grunde liegt, kann mit unsern arabischen Ziffern geschrieben und auf eine ähnliche Weise, wie eine decadische Zahl ausgesprochen werden, wenn man zehn, hundert, tausend u. s. w. als Wörter für die höhern Einheiten jedes Systems ansieht und ihnen nach Verschiedenheit der Grundzahl einen verschiedenen Werth beilegt.

So würden z. B.	10,	100,	1000,	10000	im dreitheiligen System,
	3	9	27	81	im sechstheiligen System
	6	36	216	1296	bedeuten.

Ein System, das eine größere Grundzahl als 10 hat, wie z. B. das dodecadische System, erfordert noch zwei neue einfache Ziffern für 10 und 11, da in ihm 12 erst mit 10 bezeichnet werden würde.

7. Soll irgend eine decadische Zahl in eine andere systematische Zahl verwandelt werden, so dividire man wiederholt mit der Grundzahl des andern Systems in die decadische Zahl und deren Quotienten, bis man zu einem Quotienten kommt, der kleiner ist als die Grundzahl. Der letzte Quotient und die Reste vom letzten zum ersten von links nach rechts hinter einander geschrieben, geben die verlangte Zahl.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

	36942	
7	5277	3
7	753	6
7	107	4
7	15	2
7	2	1
	212463	

Soll z. B. die decadische Zahl 36942 in eine siebentheilige Zahl verwandelt werden, so dividire man wiederholt mit 7 u. s. w., wie in beistehendem Exempel. Der Beweis für dies Verfahren liegt unmittelbar in dem Begriffe des siebentheiligen Zahlensystems und in der Befugniß, die Zahl 36942 als eine Anzahl von Haupteinheiten beider Zahlensysteme anzusehen.

8. Soll irgend eine Zahl eines andern Systems in eine decadische verwandelt werden, so multiplicire man die erste Ziffer der gegebenen Zahl von links nach rechts gezählt mit der Grundzahl und addire die folgende hinzu; hierauf multiplicire man diese Zahl wieder mit der Grundzahl und addire die folgende Ziffer hinzu u. s. w. Soll z. B. die fünftheilige Zahl 234043 in eine decadische verwandelt werden, so erhält man durch nebenstehende Rechnung die decadische Zahl 8648. Der Beweis für dies Verfahren folgt aus dem Begriffe einer systematischen Zahl und der Befugniß, jede Anzahl höherer Einheiten durch Multiplication mit der Grundzahl in niedere zu verwandeln.

```
234042
 5
13.5
 69.5
 345.5
 1729.5
 8648
```

9. Soll mit andern als decadischen Zahlen gerechnet werden, so müssen die gegebenen und gesuchten Zahlen demselben Systeme angehören und als solche geschrieben sein.

10. Die Regeln für die Addition, Subtraction, Multiplication sind so einfach, daß der Schüler sie ohne alle Anweisung nach einigem Nachdenken selbst finden kann. Bei der Division ist es jedoch nöthig, sich das Einmaleins des Divisors in dem gegebenen System zu entwerfen, um sicher rechnen zu können. Ist z. B. die siebentheilige Zahl 645324 durch 543 zu dividiren, so bilde man sich die Vielfachen des Divisors bis zum Sechsfachen und subtrahire die Producte aus Divisor und Quotient als siebentheilige Zahlen, wie in beistehender Rechnung:

1	543	645324 $= 1120 \frac{534}{543}$
2	1416	543
3	2262	1023
4	3135	543
5	4011	1502
6	4554	1416
		53
		Rest 534

11. Da das Potenziren, Radiciren, Logarithmiren zusammengesetzte Operationen sind, in denen sich die vier Grundoperationen wiederholen, so

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

ist es genügend, auf die Möglichkeit der Ausführung auch dieser Operationen an andern als decadischen Zahlen hinzuweisen, um die Gesetze nicht nur des decadischen, sondern jedes andern systematischen Rechnens zur völligen Deutlichkeit zu bringen. —

12. Bei dieser Gelegenheit mag der Anfänger auf die Wichtigkeit einer systematischen, sowie auf die Mängel der griechischen und römischen Zifferbezeichnung hingewiesen werden, um in ihm die Ueberzeugung zu wecken, daß die Fortschritte in den mathematischen Wissenschaften großentheils von den Fortschritten ihrer Zeichensprache abhängig gewesen sind. —

Uebergang.

Nachdem der Leitfaden den Begriff und die Gesetze von den sieben Zahlenverbindungen dargelegt und die Berechnung der durch sie geforderten Resultate gezeigt hat, ist es Zeit, Anwendung von diesen Gesetzen zur Lösung gestellter Aufgaben zu machen oder die Grundzüge der Algebra zu entwickeln. —

Vierter Abschnitt.

Die Elemente der Algebra oder die Lehre von den Gleichungen.

§. 60.

Begriff und Eintheilung der Gleichungen; Gegenstand und Aufgabe der Algebra. Das Entwickeln und Ordnen der Gleichungen.

1. Zwei gleiche durch das Gleichheitszeichen (=) mit einander verbundene Zahlen- oder Buchstabenausdrücke bilden eine Gleichung. Die beiden einander gleichen Ausdrücke heißen linke und rechte Seite der Gleichung. Die einzelnen durch + oder — verbundenen Ausdrücke heißen, wie sonst in der Arithmetik, Glieder der Gleichung; alle Ausdrücke in einer Klammer oder unter einem Wurzelzeichen oder über und unter einem Divisionsstrich gelten für ein Glied. (Erläuterung durch Beispiele.)

2. Die Gleichungen zerfallen nach Beschaffenheit der Seiten in folgende Klassen; in

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

a. identische Gleichungen, d. h. solche, deren beide Seiten völlig identische Ausdrücke sind. Die identischen Gleichungen wie $a = a$; $6 = 6$; $a + b = a + b$ sind eigentlich nur der symbolische Ausdruck für den Grundsatz, jede Größe ist sich selbst gleich;

b. analytische (arithmetische) Gleichungen, d. h. solche, deren beide Seiten zwar dieselben Ausdrücke enthalten, aber die eine in unentwickelter, die andere dagegen in entwickelter Gestalt. Die analytischen Gleichungen wie $a + b = b + a$; $ab = ba$; $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $\log(ab) = \log a + \log b$; $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ u. s. w. sind eigentlich arithmetische Lehrsätze, in Form von Gleichungen ausgedrückt. Beide Arten von Gleichungen gelten für jeden beliebigen Werth, den man den in ihnen vorkommenden Größen beilegen mag; sie sind nicht Gegenstand der Algebra, werden jedoch in der Algebra als bekannt vorausgesetzt und bilden das Handwerkszeug und die solide Grundlage, mit dem und auf welcher die Gleichungen umgeformt und aufgelöst werden;

c. Bestimmungsgleichungen, algebraische Gleichungen, d. h. solche, deren beide Seiten verschiedene Größenausdrücke enthalten und die nur für ganz bestimmte Werthe der in ihnen vorkommenden Größen Geltung haben. Sie enthalten in der Form von Gleichungen Aufgaben, während die beiden ersten Klassen Lehrsätze enthalten. Algebraische Gleichungen oder besser Gleichungen schlechtweg heißen sie deshalb, weil sie den Gegenstand der Algebra bilden, und Bestimmungsgleichungen, weil sie dazu dienen, um mit ihrer Hülfe unbekannte Größen in vorliegenden Aufgaben zu bestimmen.

3. Die Algebra ist die Lehre oder Theorie der Bestimmungsgleichungen oder Gleichungen im engern Sinne. Sie beschäftigt sich mit ihrem Wesen, ihrer Eintheilung, ihren Eigenschaften, ihrer Umformung und besonders mit ihrer Auflösung. Wenn in Zukunft von Gleichungen die Rede ist, so sollen immer Bestimmungsgleichungen darunter verstanden werden.

4. Die in jeder Gleichung vorkommenden Größen stehen in gegenseitiger Abhängigkeit von einander, so daß jede von ihnen der Größe nach durch die übrigen bestimmt ist. (Erläuterung an Beispielen.)

5. Eine Gleichung für eine Größe in ihr auflösen, heißt, sie so umformen, ohne die Gleichung zu stören, daß diese Größe auf einer Seite der Gleichung allein erscheint, während die andere Seite ihren Werth, durch die übrigen Größen der Gleichung ausgedrückt, darstellt. Die Größe, für welche eine Gleichung aufgelöst wird, heißt „Hauptgröße", „gesuchte Größe", Unbekannte". Sie wird mit den letzten Buchstaben t, u, v, x, y, z des lateinischen Alphabets bezeichnet, während die übrigen Größen mit Ziffern

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

oder den ersten Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet werden. Die durch die Auflösung erhaltene Gleichung heißt Endgleichung, im Gegensatz zu der ursprünglich gegebenen Gleichung, welche Grundgleichung genannt wird.

6. Da eine jede Gleichung für jede in ihr vorkommende Größe aufgelöst werden kann, so hat sie so viele Auflösungen, als Größen in ihr enthalten sind; eine jede dieser Auflösungen entspricht einer in der Gleichung enthaltenen Aufgabe. Z. B. die Gleichung $3s^2 = 5h^2$ gibt zwei Lösungen für zwei in ihr enthaltene Aufgaben $a + (n - 1)d = t$ vier Lösungen für vier verschiedene in ihr enthaltene Aufgaben.

7. Jeder Werth, der, für die Hauptgröße substituirt, der Gleichung genügt, heißt ein Werth der Unbekannten, oder eine Wurzel der Gleichung. Wann eine Gleichung mehrere Wurzeln hat und wie viele, wird später in Frage kommen und bestimmt beantwortet werden.

8. Kommen in einer Gleichung außer der Hauptgröße nur Zahlen vor, so heißt sie eine numerische oder Zahlengleichung, in jedem andern Falle eine Literal- oder Buchstabengleichung. Die Lösungen der Literalgleichungen enthalten allgemeine Formeln für ganze Klassen von Aufgaben, die Lösungen der numerischen Gleichungen dagegen specielle Werthe für einen concreten Fall.

9. Nach der Anzahl der in einer Gleichung vorkommenden Hauptgrößen unterscheidet man Gleichungen mit einer, zwei und mehr Hauptgrößen oder Unbekannten.

10. Nach der Verschiedenheit der Verbindung der bekannten und unbekannten Größen in einer Gleichung unterscheidet man unentwickelte und entwickelte Gleichungen. Unentwickelt ist eine Gleichung, wenn in ihr die Unbekannte als Glied oder Factor in einer Klammer, oder als Divisor, Radicand, Exponent oder als Logarithmand vorkommt; in jedem andern Falle dagegen heißt sie entwickelt. (Beispiele.)

11. Geordnet heißt eine entwickelte Gleichung, wenn die einzelnen Glieder mit derselben Potenz der Hauptgröße in ein Glied zusammengezogen und sämmtliche Glieder nach steigenden oder fallenden Potenzen der Hauptgröße geordnet sind; ungeordnet dagegen ist sie, wenn keine dieser Bedingungen erfüllt ist.

12. Eine Gleichung, in der eine Seite $= 0$ ist, heißt anullirt oder auf Null reducirt. Wann man von dieser Form der Gleichungen Gebrauch macht, wird später gezeigt werden.

13. Die entwickelten und geordneten Gleichungen zerfallen nach dem höchsten Exponenten, mit dem die Unbekannte behaftet ist, in Gleichungen ersten, zweiten, dritten Grades u. s. w. Die Gleichungen zweiten und dritten Grades heißen gewöhnlich quadratische und kubische Gleichungen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

13. Nach der Anzahl der Werthe, welche die Unbekannte in einer Gleichung haben kann, zerfallen die Gleichungen in bestimmte und unbestimmte. Bestimmt heißt eine Gleichung, wenn die Anzahl der Wurzelwerthe eine bestimmte, unbestimmt dagegen, wenn sie, ohne andere Nebenbedingung einzuführen, eine unbestimmte unendliche ist. Jede einzelne Gleichung ist unbestimmt, sobald in ihr mehr als eine Unbekannte vorkommt.

14. Nach den Operationen endlich, denen die Gleichungen unterworfen werden müssen, um den Werth der Unbekannten zu bestimmen, zerfallen sie in algebraische im engern Sinne, mit denen wir uns zunächst beschäftigen werden, und in transcendente. Transcendent im Allgemeinen heißen alle diejenigen Gleichungen, in denen die Unbekannte als Exponent, Logarithmus oder als trigonometrische oder cyklometrische Function vorkommt, oder unter einer der Formen a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arccos x$, deren Entwicklung und Berechnung die Kräfte der elementaren Algebra übersteigt.

15. Der Satz: Jede Gleichung bleibt ungeändert, wenn man auf beiden Seiten mit gleichen Größen gleiche Operationen vornimmt, bildet den einzigen Grundsatz für alle Umformungen der Gleichungen.

Entwicklung und Ordnung der Gleichungen.

16. Zur Entwicklung und Ordnung der Gleichungen, d. h. zu den beiden vorbereitenden Umformungen, die allen übrigen Operationen, die zur Lösung aller Gleichungen, welchem Grade sie auch angehören mögen, noch sonst erforderlich sind, vorangehen müssen, bedarf man der Einschließung in Klammern, der Auflösung von Klammern, der Transposition von Gliedern, der Fortschaffung von Divisoren, Wurzelzeichen (Rationalmachen) und Exponenten. — Das Operiren mit Klammern, sowie auch das Fortschaffen von Exponenten, was durchs Logarithmiren geschieht, so weit es nicht die Kräfte der Algebra überschreitet, d. h. so oft man schon berechnete logarithmische Tafeln voraussetzt, ist schon vom ersten Abschnitte her bekannt und geübt. Die drei wichtigsten vorbereitenden Umformungen sind das Transponiren, das Fortschaffen von Divisoren und die Rationalmachung.

16. Ein oder mehrere Glieder werden von einer Seite auf die andere geschafft oder transponirt, wenn man sie mit entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite setzt, denn dadurch hat man auf beiden Seiten dieselbe Größe addirt oder subtrahirt.

17. Einen oder mehrere Divisoren schafft man fort, indem man die sämmtlichen übrigen Glieder mit dem fortzuschaffenden Divisor multiplicirt, denn dadurch hat man die Gleichung auf beiden Seiten mit derselben Größe multiplicirt. (Beispiel.) Haben die fortzuschaffenden Divisoren gemeinschaftliche Factoren, so suche man zu ihnen den kleinsten Generalnenner und mul-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

tiplicire jedes Glied der Gleichung mit dem Quotienten aus seinem Divisor und dem Generalnenner. (Beispiel.) In der Regel wird man, falls sich die Rechnungen leicht im Kopfe ausführen lassen, durch wiederholtes Fortschaffen einzelner Divisoren rascher zum Ziele kommen, als durch Fortschaffung sämmtlicher Divisoren auf einmal.

18. Ein Wurzelzeichen schafft man aus einer Gleichung fort, wenn man alle übrigen Glieder auf die andere Seite transponirt und die so umgeformte Gleichung mit dem Wurzelexponenten potenzirt. Sind sämmtliche Wurzelzeichen, unter denen die Unbekannte steht, fortgeschafft, so ist die Gleichung rational gemacht.

Das Fortschaffen von Wurzelzeichen ist sehr schwierig, ja kann leicht unmöglich werden, wenn die Wurzelzeichen sich häufen oder Wurzeln verschiedener Grade vorkommen. Wie man in dem letztern Falle bei Gleichungen höherer Grade verfährt, wird bei ihnen gezeigt. Hier haben wir es nur mit den einfachsten Fällen zu thun, mit dem Fortschaffen eines quadratischen oder kubischen Wurzelausdrucks (Beispiele).

Allgemeine Form der algebraischen Gleichungen.

19. Nachdem jede Gleichung mit einer Unbekannten entwickelt und geordnet ist, muß sie folgende Gestalt annehmen.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots . GH + N = 0.$$

In dieser Form können die Coefficienten beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative, rationale oder irrationale, reelle oder imaginaire, jedoch keine x enthaltende Zahlen oder Buchstabenausdrücke sein. Das Glied N, das x^0 enthält, heißt schlechtweg das bekannte Glied. Die $+$ Zeichen vor den Gliedern gelten als Operationszeichen und werden durch das $-$ Zeichen vertreten, wenn die Coefficienten negativ sind. Das erste Glied der Gleichung oder x^n wird immer positiv genommen. Ist es negativ, so wird die Gleichung mit -1 multiplicirt oder sämmtliche Vorzeichen umgekehrt, wodurch die Gleichheit nicht gestört wird. Hat das erste Glied einen Coefficienten, so wird die ganze Gleichung, um ihn fortzuschaffen, durch denselben dividirt. Fehlen in einer Gleichung ein oder mehrere Glieder, so kann man sie als mit dem Coefficienten 0 versehen betrachten.

Demnach ist die allgemeine Form der Gleichungen des

ersten Grades $x + N = 0.$

zweiten „ $x^2 + Ax + N = 0$

dritten „ $x^3 + Ax^2 + Bx + N = 0$ u. s. w.

20. Eintheilung der Algebra. Die Algebra zerfällt in die elementare und höhere Algebra oder Theorie der Gleichungen. Jene handelt von den Gleichungen der beiden ersten, diese von den Gleichungen aller höhern Grade. Die allgemeine Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Grades, sowie die allgemeine Auflösung bestimmter Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten, werden schon wegen der sich bei ihrer Lösung erhebenden Schwierigkeiten zur höhern Algebra gerechnet.

21. **Beispiele** für die Entwicklung, Ordnung und Rationalmachung von Gleichungen.

1. $x - a = \frac{bc}{d} + \frac{Ax}{de}$ geordnet $(de - cf)\,x - (ad + bc)\,e = 0$.
2. $\frac{a + 2x}{4a} - \frac{7a - 5x}{6b} + 3 - \frac{9x}{4} = \frac{x}{ab} + \frac{5x}{6b} =$ geordnet $(27\,ab - 9b + 12)\,x - (39\,ab - 14\,a^2) = 0$.
3. $a^{mx+n} = b^{px+q}$; entwickelt und geordnet $x\,(m \log a - p \log b) + n \log a - q \log b = 0$.
4. $\frac{48}{x+3} = \frac{165}{x+10} - 5 = x^2 - \frac{52}{5}x + 27 = 0$.
5. $\frac{x^4 - x}{x - 1} = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} =$; ?
6. $\frac{1}{x^4 - 1} + \frac{1}{x^3 - 1} + \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1} = 0$; ?
7. $\sqrt{a - x} - x = a$; geordnet $x^2 + (2a + 1)\,x + a\,(a - 1) = 0$.
8. $ax + b = \sqrt[3]{cx}$ rational gemacht und geordnet $a^3x^3 + 3a^2bx^2 + (3ab^2 + c)\,x + b^3 = 0$.
9. $3\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt[3]{x}$ gibt $729\,x^3 - 739\,x^2 + 11\,x - 1 = 0$.
10. $\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b} = \sqrt{x - c}$; ?
11. $\frac{x-5}{x+6} + \frac{x-4}{x+5} + \frac{x-3}{x+4} + \frac{x-2}{x+3} + \frac{x-1}{x+2} = 0$. ?
12. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = \frac{1}{x}$. ?

A. Gleichungen vom ersten Grade.

§. 61.

Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten.

1. Eine Gleichung vom ersten Grade mit einer Unbekannten heißt jede Gleichung, welche entwickelt und geordnet die Unbekannte in keiner höhern als der ersten Potenz enthält, und die demnach, wenn alle Glieder mit x in ein Glied zusammengezogen sind, zwei Glieder enthält und auf die allgemeine Form $Ax + B = 0$ gebracht werden kann.

2. Eine solche Gleichung wird aufgelöst, nachdem sie geordnet und ent-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

wickelt ist, indem man sie durch ihren Coefficienten dividirt. Ist $Ax + B = 0$ die allgemeine Form der Grundgleichung, so ist $x = -\frac{B}{A}$ die allgemeine Form der Endgleichung oder der Wurzel; ist dagegen die Gleichung $Ax = B$, so ist die allgemeine Form für die Endgleichung $x = \frac{B}{A}$.

3. Jede Gleichung des ersten Gliedes hat nur einen Werth für die Unbekannte oder nur eine Wurzel, weil jeder Quotient ein eindeutiger Ausdruck ist.

Praktische Winke für die Auflösung der Gleichungen.

4. Durch die in den Sätzen des vorigen §. erklärten Umformungen und Operationen, sowie durch die Division mit dem Coefficienten der Unbekannten ist die Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten theoretisch vollständig erledigt. Ueber die Aufeinanderfolge der einzelnen Operationen lassen sich keine allgemein gültige Regeln geben, doch beachte der Anfänger bei der Lösung folgende Fingerzeige, für welche die Gründe sehr einfach und an sich klar sind.

a. Man suche die Gleichung bei jeder Umformung in der einfachsten Gestalt zu erhalten und sie nach der Umformung auf die einfachste Gestalt zurückzuführen.

b. Die Producte aus bekannten Größen so lange als möglich in unentwickelter Gestalt zu erhalten, damit am Ende der Entwicklung bei der Division mit dem Coefficienten der Unbekannten in das bekannte Glied, die gleichen Factoren in dem Auflösungsquotienten im Dividenden und Divisor leicht erkannt und gegeneinander gehoben werden können. Auf diese Weise werden unnöthige Multiplicationen und Divisionen mehrgliedriger Ausdrücke, die sehr leicht zu Rechenfehlern Veranlassung geben können, entweder völlig vermieden oder auf minder zusammengesetzte Ausdrücke zurückgeführt.

c. Erscheint die Wurzel in der Form eines nicht weiter reducirbaren mehrgliedrigen Quotienten, so stelle man diesen auf doppelte Weise mit entgegengesetzten Vorzeichen im Dividenden und Divisor dar, was dadurch leicht geschieht, daß man die gefundene Form des Quotienten in Divisor und Dividend mit -1 multiplicirt.

Beispiel: ist $x = \frac{a - b}{c - d}$ so ist ebensogut $x = \frac{b - a}{d - c}$.

d. Endlich drücke man die Endgleichung bei Buchstabengleichungen in Worten aus, wobei es öfter nöthig wird, die Gleichung in einer andern als für die Rechnung bequemsten Gestalt auszudrücken.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiele für die Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten.

Zur Veranschaulichung der eben aufgestellten praktischen Winke sollen einige Aufgaben aus Heis vollständig aufgelöst werden. Soll z. B.

Nr. 69. $9{,}45-(0{,}945+9{,}45\,x)\,0{,}945=0{,}945\,x-(9{,}45-0{,}945\,x)\,9{,}45$ (1)
aufgelöst werden, so setze man $0{,}945 = a$ und $9{,}45 = 10\,a$. Dann ist
$10\,ax-(a+10\,ax)\,a = ax-(10\,a-ax)\,10\,a$ (2)
dividirt man mit a, so gibt dies $10x-a-10\,ax=x-100\,a+10\,ax$ (3)
oder zusammengezogen und geordnet $(20\,a-9)\,x = 99\,a$
oder $x = \frac{99\,a}{20\,a-9} = \frac{99\,.\,0{,}945}{9{,}9} = 10\,.\,0{,}945 = 9{,}45$.

Nr. 70. $\frac{5b-6c}{4a^2}x+2a-\frac{5b-4a}{3b-4c}x-\frac{3b-5n}{2a}=\frac{5n-4c}{2a}-\frac{6c-4a}{3b-4c}x$ (1).

Man bringe die bekannten und unbekannten Glieder auf eine Seite und ziehe die Glieder mit gleichen Nennern zusammen, so erhält man
$\frac{5\,b-6\,c}{4\,a^2}x-\frac{5\,b-6\,c}{3\,b-4\,c}x=\frac{3\,b-4\,c}{2\,a}-4\,a^2$ (2).

Multiplicirt man nun mit $4\,a^2(3\,b-4\,c)$ und sondert die Hauptgröße ab, so gibt dies
$(3\,b-4\,c-4\,a^2)(5\,b-6\,c)\,x=(3\,b-4\,c-4\,a^2)\,2\,a.(3\,b-4\,c)$ (3).
Hebt man auf beiden Seiten mit $3\,b-4\,c-4\,a^2$, so findet man
$x=\frac{2\,a\,.(3\,b-4\,c)}{5\,b-6\,c}$ in der einfachsten Gestalt.

Nr. 76. Man dividire die Gleichung mit $^2/_3$ u. s. w.

Nr. 77. Man setze $1{,}4142\ldots=\sqrt{2}$ u. s. w.

Nr. 88. Man entwickle die Gleichung wie folgt:
$$(a^2-b^2)^2x^2-2\,(a^2-b^2)\,x+1+4\,a^2b^2x^2-4\,abx+1 = (a^2+b^2)^2x^2+2\,(a^2+b^1)\,x+1.$$
Die Glieder mit x^2 fallen auf beiden Seiten gegen einander fort, da sie dieselben Coefficienten haben. Man erhält daher zunächst
$-2\,(a^2-b^2)\,x+1-4\,abx=2\,(a^2+b^2)\,x$ und aus ihr nach leichter Umformung die Lösung.

Nr. 97, 98, 99, 100. Dividire mit der niedrigsten Potenz von x, respective mit x^{n-1}, x^n, x^{-17}, $x^{3^4/_5}$, so kommt man auf einfache Formen, deren Lösung keine Schwierigkeiten bietet.

Nr. 114. Schafft man die Divisoren fort, so erhält man $m\sqrt{m}+p\sqrt{m}= p\sqrt{x}-m\sqrt{x}$; $(m+p)\sqrt{m}=(p-m)\sqrt{x}$; $(m+p)^2m=(p-m)^2x$;
$$x=\left(\frac{m+p}{p-m}\right)^2m.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Nr. 154. Man drücke die Zahlen 3125; 15625; 0,2 als 5^5; 5^6 und 5^{-1} aus, so fallen die Logarithmen von 5 durch Division fort und man erhält eine einfache Gleichung.

Nr. 155. $3^{(5^x)} = 7$ gibt logarithmirt $5^x . \log 3 = \log 7$ oder $5^x = \frac{\log 7}{\log 3}$ oder von Neuem logarithmirt

$$x \log 5 = \log\log 7 - \log\log 3 \text{ und}$$

$$x = \frac{\log\log 7 - \log\log 3}{\log 5.}$$

Eine gute Uebung für den Anfänger besteht in der Auflösung von arithmetischen, geometrischen und anderen Rechnungsformeln für alle darin vorkommenden Größen. Sollten unter den zu lösenden Gleichungen auch einige von höheren Graden vorkommen, so lasse der Lehrer diese wenigstens entwickeln und nach der Hauptgröße ordnen.

Beispiele von Formeln, die für alle darin vorkommenden Größen aufzulösen sind. 1. $D = dq + r$; 2. $t = a + (n-1)d$; 3. $S = (2a + (n-1)d)\frac{n}{2}\cdot$ 4. $T = (a+b)\frac{n}{2}$; 5. $J = (R^2 + r^2 + Rr)\frac{h\pi}{3}$;

6. $K = \frac{3p + 2a}{8p + 5a} \cdot \frac{4f}{e}$; 7. $P = \frac{r}{5 - \frac{3f^2}{5c}}$; 8. $v = \frac{S}{a} \cdot \frac{K}{n + q[(1+\delta)r + p + f]}$.

§. 62.

Regeln für die Bildung von Gleichungen aus von einander abhängigen Größenangaben oder für in Worte eingekleidete Aufgaben.

1. Die Auffuchung und Aufstellung von Gleichungen für von einander abhängige Größenangaben ist eigentlich nie Sache der Algebra an sich, sondern derjenigen Wissenschaft, aus der die Größenverhältnisse genommen sind. Denn das Hauptgeschäft der einzelnen Wissenschaften besteht darin, uns mit den Hauptgleichungen bekannt zu machen, in denen die Abhängigkeiten der in ihnen vorkommenden Größen ausgeprägt sind. So macht uns die Arithmetik mit den Gleichungen bekannt, in denen die Abhängigkeiten bestimmter Zahlenverbindungen enthalten sind; die Geometrie und Trigonometrie lehrt uns die Gleichungen für die Berechnung der geradlinigen Figuren; die Mechanik die Grundgleichungen für Bewegungsaufgaben u. s. w.

2. Die Algebra setzt diese Gleichungen als bekannt voraus und macht von ihnen zur Lösung von Aufgaben Gebrauch, in denen jene Größenverhältnisse und gegenseitigen Abhängigkeiten vorkommen.

3. Die Regeln für die Auffuchung und Aufstellnng von algebraischen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Gleichungen für die in Worte eingekleideten Aufgaben beziehen sich auf folgende Punkte:

a. Derjenige, welcher eine Aufgabe irgend einer Art lösen will, muß sich genau der in der Aufgabe vorkommenden Größenverhältnisse und der sie ausdrückenden allgemeinen Gleichungen bewußt sein, ehe er versucht die Hauptgröße zu bestimmen und die Seiten der Gleichung zu bilden.

b. Dann muß die Hauptgröße oder Unbekannte gesucht und bezeichnet werden, wobei vorzüglich auf die Einheit zu achten ist, in der sie ausgedrückt wird, weil in derselben Einheit auch die anderen Größenangaben aufzustellen sind. Hat man unter mehreren von einander abhängigen Größen die Wahl für die Hauptgröße, so wähle man diejenige, bei der man in der Aufstellung der Größenbezeichnungen directe Operationen erhält, weil sich mit ihnen bequemer und sicherer rechnen läßt und dadurch namentlich Fortschaffungen von Divisoren und Wurzelzeichen erspart werden können.

c. Hierauf müssen unter den Größenverbindungen diejenigen aufgesucht werden, für welche sich zwei verschiedene aber gleiche Ausdrücke bilden lassen.

d. Endlich müssen diese beiden gleichen Ausdrücke zu Seiten der Gleichung gemacht werden.

Bei Anwendung der vorigen Regeln ist es sehr nützlich die einzelnen, für die Aufstellung der Gleichung Bedeutung habenden Beziehungen sich in kurzer, wo möglich tabellarischer Form, zu merken, um bei der Zergliederung der Aufgabe dem Gedächtnisse nicht zu viel zu überlassen und sich nicht Verwechselungen und anderen Irrthümern auszusetzen. Wenn der Schüler sich Fertigkeit im Ansatze erwerben will, so muß er sich unermüdlich an den verschiedenartigsten Aufgaben üben, und jede eingekleidete Aufgabe auf eine einfache arithmetische Aufgabe zurückzubringen suchen.

§. 63.

Sachliche Erklärungen zu einigen Klassen von Aufgaben und erläuternde Beispiele für den Ansatz der Gleichungen.

1. Erklärung und Erläuterung der allgemeinen Aufgabe: Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe (s) und Differenz (d) gegeben ist.

Die obige Aufgabe kann entweder als Aufgabe mit einer oder zwei Unbekannten gerechnet werden. Wird sie als Aufgabe mit einer Unbekannten gerechnet, so können die beiden Seiten der Gleichung entweder verschiedene Ausdrücke für die Summe oder für die Differenz sein. Sollen die beiden Seiten verschiedene Ausdrücke für die Summe sein, so muß auf der einen Seite die gegebene Summe stehen, während die andere Seite einen zweiten

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Ausdruck für die Summe enthält, in dem die gegebene Differenz enthalten sein muß. In diesem Falle kann man entweder die kleinere oder größere Zahl unmittelbar suchen und aus ihr die andere mittelbar bestimmen. Sucht man die kleinere Zahl und bezeichnet sie mit x, so ist die größere Zahl $x + d$ und die Gleichung $s = x + (x + d)$. Sucht man dagegen die größere Zahl und bezeichnet sie mit x, so ist die kleinere $x - d$ und die Gleichung $x + (x - d) = s$. Sollen dagegen beide Seiten verschiedene Ausdrücke für die Differenz sein, so ist die eine Seite die gegebene Differenz und die andere Seite muß einen Ausdruck für die Differenz enthalten, in dem die gegebene Summe vorkommt. Bezeichnet man hier die eine gesuchte Zahl mit x (ob die größere oder kleinere ist willkürlich), so ist die andere $s - x$ und die Gleichung $x - (s - x) = d$.

2. Erläuterungen zu den Zins-Rabatt-Discontaufgaben.

a. Zins oder Zinsen heißt die Entschädigung, die der Darleiher für ein ausgeliehenes Kapital von dem Schuldner empfängt.

b. Discont heißt der Zins, der für ein später zu zahlendes Kapital bei sofortiger Bezahlung von dem Empfänger an den Zahlenden vergütet wird.

c. Rabatt heißt der Erlaß, der dem Käufer von Waaren an dem ausbedungenen Kaufpreise zu Gute gerechnet wird.

d. Thara heißt das Gewicht der Verpackung bei Waaren, das von dem Bruttogewichte abgerechnet wird, um das Nettogewicht zu bestimmen.

e. Prämie heißt die Entschädigung, die der Versicherte dem Versicherer für die übernommene Gefahr zahlt.

f. Die Einheit, nach welcher bei sämmtlichen obigen Größenangaben gerechnet wird, ist Hundert.

g. Zins, Discont, Prämie und Thara wird von Hundert gerechnet, dagegen Rabatt sowohl von Hundert als auf Hundert und mit Procent (p) bezeichnet, so daß im ersten Falle 100 Thaler p Thaler und im letzten Falle erst $100 + p$ Thaler p Thaler Rabatt geben.

h. Bei Rechnungen, in denen von oder in Hundert gerechnet wird, ist die Entschädigung für die Einheit $= \frac{p}{100}$, dagegen bei den Rechnungen auf Hundert $= \frac{100}{100 + p}$. Die Baarzahlung für die Einheit (rabattirte oder discontirte Einheit) ist im ersten Falle $\frac{100 - p}{100}$ und im zweiten Falle $\frac{100}{100 + p}$. Der Einkaufspreis, oder die

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

verzinste Einheit ist im ersten Falle $\frac{100}{100-p}$ und im zweiten Falle $\frac{100+p}{100}$.

i. Bei den hierher gehörigen Aufgaben können die beiden Seiten der Gleichung Ausdrücke für die Baarzahlung für den Einkaufspreis oder für den Rabatt u. s. w. sein.

Erläuterungen zu den Bewegungsaufgaben.

3. Bei den Bewegungsaufgaben kommen, abgesehen von der Richtung und andern Nebenumständen, besonders Geschwindigkeit (c), Zeit (t) und durchlaufener Raum (s) (Linie) in Betracht. Durch zwei dieser Größen ist die dritte bestimmt. Ihre Abhängigkeit wird durch die drei Gleichungen $s = ct$; $c = \frac{s}{t}$; $t = \frac{s}{c}$ ausgedrückt. Die Geschwindigkeit wird durch den Raum gemessen, den der bewegte Körper (Punkt, Bote) in der Zeiteinheit (Secunde, Minute, Stunde) zurücklegt. Eine Bewegung heißt gleichförmig, wenn während der ganzen Bewegung die Geschwindigkeit unverändert (constant) ist. Wir werden es zunächst nur mit gleichförmigen Bewegungen zu thun haben. Die Seiten der Gleichungen für Bewegungsaufgaben können Ausdrücke für durchlaufene Räume, für Geschwindigkeiten und für gebrauchte Zeiträume sein. — Kommt die Richtung der Bewegung bei einer Aufgabe in Betracht, so sind alle Beziehungen algebraischer Zahlen zu berücksichtigen.

Erläuterung zu den Münzaufgaben.

4. Eine jede Silber- oder Goldmünze enthält außer dem reinen (feinen) Golde oder Silber, dem Korn der Münze, auch noch einen bestimmten Zusatz von Kupfer oder von einem andern Metalle, die Legirung. Das Bruttogewicht einer Münze oder ihr Schrot besteht demnach aus dem Gewichte des Kornes und der Legirung. Das Verhältniß zwischen Korn und Schrot in einer Silbermünze wird durch den Münzfuß bestimmt und entweder nach Loth einer Mark (16 Loth) angegeben, oder durch einen Bruch ausgedrückt. So sagt man z. B. 14 Thaler enthalten eine Mark feines Silber und Silber und Kupfer verhalten sich in jedem Thaler wie 3 : 1, oder Schrot und Korn wie 4 : 3. Oder die Thaler enthalten in 16 Loth Bruttogewicht 12 Loth Silber und 4 Loth Kupfer oder die Thaler enthalten 12löthiges Silber oder sind 12löthig. — Bei den Münzaufgaben können die Seiten der Gleichungen Ausdrücke für das Schrot, für das Korn oder für die Legirung sein.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiele für den Ansatz.

1. Heis, 23. Ist die Anzahl der Schüler in der ersten Klasse $= x$
so ist „ „ „ „ „ „ zweiten „ $= x + 4$
und „ „ „ „ „ „ dritten „ $= x + 12$
endlich „ „ „ „ „ „ vierten „ $= x + 15$

daher die Anzahl der Schüler sämmtlicher Klassen $= 4x + 31$
da nun die Anzahl der Schüler sämmtlicher Klassen $= 123$ ist,

so ist $4x + 31 = 123$ die gesuchte Gleichung.

Wie würde die Gleichung beschaffen sein, wenn man die Zahl der Schüler in der zweiten oder dritten oder vierten Klasse mit x bezeichnet hätte?

2. Heis, 50. Bezeichnet man die in Thalern zu zahlende Prämie mit x, so hat der Kaufmann bei 6 Procent Prämienzahlung, für die Waaren $\frac{6}{100} \cdot 14000$ Thaler zu bezahlen und für die Prämie von x Thaler außerdem noch $\frac{6}{100}\,x$ Thaler. — Seine ganze zu zahlende Prämie beträgt demnach einmal x Thaler und zugleich auch $\frac{6}{100} \cdot 14100 + \frac{6}{100} \cdot x$ Thaler. Daher ist die Gleichung $\frac{6}{100} \cdot 14100 + \frac{6}{100}\,x = x$.

3. Heis, 59. Bezeichnet man das Nettogewicht der Waare in Pfunden mit x, so kostet 1 Pfund Netto $\frac{16}{30}$ Thaler $= \frac{8}{15}$ Thaler nach einer bestimmten Zeit zahlbar. Da nun 1 Thaler bei der Baarzahlung $= \frac{87^1/_2}{100}$ ist, so ist der Preis für x Pfund in der Baarzahlung $= \frac{8}{15} \cdot \frac{87^1/_2}{100}\,x = \frac{7x}{15}$. Da ferner die Thara zu 7 Procent gerechnet wird, so ist 1 Pfund Netto $= \frac{100}{93}$ Brutto und da 110 Pfund $= 1^5/_6$ Thaler Fracht kosten, so zahlt 1 Pfund an Fracht $\frac{11}{6} : 110 = \frac{11}{6\,.\,110} = {}^1/_{60}$ Thaler. Da nun x Pfund Netto $= \frac{100}{93}\,x$ Brutto geben, so zahlt der Kaufmann für diese an Fracht $\frac{1}{60} \cdot \frac{100}{93}\,x$ Thaler. Die ganze Baarzahlung beträgt demnach $\frac{7x}{15} + \frac{5x}{279}$ und da diese zugleich auch 180 Thlr. 8 Ngr. beträgt, so ist die Gleichung $\frac{7x}{15} + \frac{5x}{279} = 180\,\frac{4}{15}$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

4. Heis, 70. Ist x das gesuchte Kapital und die Summe von 895 Thlrn. $= a$, so ist am Ende des ersten Jahres nach Wegnahme von a Thalern das Capital auf $\frac{3x}{2} - a$ Thaler angewachsen. Am Ende des zweiten Jahres ist es auf $\left(\frac{3x}{2} - a\right)\frac{3}{2} - a$ Thaler angewachsen u. s. w. Am Ende des fünften Jahres endlich ist es auf $\left(\left(\left(\left(\frac{3x}{2} - \overset{1}{a}\right)\frac{3}{2} - \overset{2}{a}\right)\frac{3}{2} - \overset{3}{a}\right)\frac{3}{2} - \overset{4}{a}\right)\frac{3}{2} - \overset{5}{a}$ angewachsen. Da es sich nun verdoppelt haben soll, so ist die gesuchte Gleichung $2x = \left(\left(\left(\left(\frac{3x}{2} - a\right)\frac{3}{2} - a\right)\frac{3}{2} - a\right)\frac{3}{2} - a\right)\frac{3}{2} - a$.

5. Heis, 71. Bezeichnet man die fünf gesuchten Ziffern mit x, so ist bei der ersten Stellung, wenn die 1 in der ersten Stelle linker Hand steht, $100000 + x$ ein Ausdruck für die ganze Zahl. Steht die 1 aber an der ersten Stelle rechter Hand, so ist $10x + 1$ ein Ausdruck für die ganze Zahl in dieser Stellung. Da nun dieser zweite Ausdruck das Dreifache des ersten Ausdrucks sein soll, so ist $(100000 + x)\,3 = 10x + 1$, die gesuchte Gleichung.

6. Heis, 89. Bezeichnet man die Entfernung von A und B in Meilen mit x, so ist die erste zurückgelegte Wegstrecke $x - 4$ Meilen. Da das Schiff nun um $\frac{1}{19}$ dieser Strecke zurückgeworfen wird, so hat es nur $\frac{18}{19}$ davon oder $(x - 4)\frac{18}{19}$ Meilen zurückgelegt. Da das Schiff nun abermals $\frac{1}{24}$ der zurückgelegten Strecke vorwärts segelt, so ist es im Ganzen $\frac{25}{24} \cdot (x - 4)\frac{18}{19}$ vorwärtsgesegelt. Da es nun nochmals auf ähnliche Weise zurückgeworfen, wieder auf ähnliche Weise vorwärts dringt und in B anlangt, so ergibt sich leicht die Gleichung $(x - 4)\frac{18}{19} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{10}{9} = x$.

7. Heis, 92. Bezeichnet man die Zahl der Thaler, welche A erhält, mit x, so erhält $A = x$

" " $B = \frac{3x - 600}{2}$

" " $C = \left(\frac{5x - 600}{2}\right)\frac{3}{4} + 113 = \frac{15x - 896}{8}$

" " $D = \left(\frac{23x - 896}{8}\right)\frac{4}{7} - \left(\frac{3x - 600}{2}\right)\frac{3}{5} = \frac{26x + 4060}{35}$

Da nun E $^1/_6$ des Antheils der vier erstern erhält, so erhalten sie alle zu-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

sammen $^7/_6$ der Summe der vier ersten und 627 Thaler. Demnach ist die Gleichung: $\left(x+\frac{3x-600}{2}+\frac{15x-896}{8}+\frac{26x+4060}{35}\right)\frac{7}{6}+627=17000.$

8. Heis, 134. Bezeichnet man die Anzahl der Minuten, welche der zweite Körper gebraucht um den ersten einzuholen, mit x, so gebraucht der erste Körper bis zur Einholung, je nachdem der zweite Körper t Minuten später oder früher abgeht $(t \pm x)$ Minuten. Geht der zweite Körper von einem Punkte aus, der d Fuß rückwärts oder vorwärts von dem Ausgangspunkte des ersten liegt, so hat der erste Körper die Fußzahl des zweiten Körpers und außerdem noch $\pm d$ Fuß zu machen, wenn beide eine gleiche Anzahl von Fuß gemacht haben sollen. Da nun der erste Körper in einer Minute $\frac{m}{a}=c$ Fuß macht und der zweite Körper $\frac{n}{b} = c$ Fuß, so erhält man folgende Gleichung $c'x = (x \pm t)\, c \pm d$ und aus ihr

$$x = \frac{\pm t\ \ c \pm d}{c' - c}$$ nach dem Abgang des zweiten Körpers.

Um über die Beziehung urtheilen zu können, welche zwischen den Größen a, m, t, c, b, n stattfinden muß, wenn die Lösung der Aufgabe möglich oder unmöglich sein soll, setze man $c = \frac{m}{a}\ c' = \frac{n}{b}$, so erhält man

$\frac{(\pm mt \pm ad)\,b}{an - bm} = x.$ Ist nun u. s. w.

Die Discussion der Gleichungen soll im nächsten §. gelehrt werden.

9. Heis, 150. Nimmt man an, das Dampfschiff fahre, den Aufenthalt abgerechnet, x Stunden, so fährt es stromabwärts, da es stromaufwärts nur mit halber Geschwindigkeit fährt $\frac{x}{3}$ Stunden. Da es nun in jeder Stunde $\frac{7}{3}$ Meilen fährt, so legt es in $\frac{x}{3}$ Stunden $\frac{7x}{9}$ Meilen = der Entfernung der Oerter, zurück. Das Segelschiff hat allein zurückgelegt $^1/_2$ Meile, außerdem in $1^1/_2$ Stunden $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}$ Meilen oder 1 Meile und in x Stunden zugleich mit dem Dampfschiffe $\frac{2x}{3}$ Meilen; also im Ganzen $\frac{2x}{3}+\frac{3}{2}$ Meilen = der Entfernung der Oerter. Demnach ist die Gleichung $\frac{2x}{3}+\frac{3}{2}=\frac{7x}{9}$.

10. Heis, 162. Bezeichnet man die Anzahl der Hundesprünge mit x, so hat der Hase bis zur Einholung $\frac{5x}{4}$ Hundesprünge gemacht. Da er

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

nun schon 90 Sprünge voraus hat, so hat er im Ganzen $\frac{5x}{4} + 90$ bis zur Einholung gemacht. Vergleicht man aber seine Sprünge der Größe nach mit den Hundesprüngen, so ist ein Hasensprung $= {}^5/_7$ Hundesprung; folglich die ganze Anzahl der Hasensprünge $= \left(\frac{5x}{4} + 90\right) {}^5/_7$ Hundesprünge. Da nun beide Zahlenausdrücke gleich sein müssen, so ist die Gleichung $x = \left(\frac{5x}{4} + 90\right){}^5/_7$. —

Wie würde die Gleichung beschaffen sein, wenn man die Anzahl der Hasensprünge mit x bezeichnete?

11. Heis, 185. Bezeichnet x die Zeit der ersten Terminzahlung, so sind die

Terminzahlungen	und die Termine
200	x
300	$2x + 1^1/_2$
400	$3x + 4^1/_2$
500	$4x + 9$
600	$5x + 15$

daher die Gleichung $2000 \,.\, 14 = 200x + 300\,(2x + 1^1/_2) + 400\,(3x + 4^1/_2) + 500\,(4x + 9) + 600\,(5x + 15)$.

12. Heis, 222. Bezeichnet man mit x das Bruttogewicht oder Schrot der zu suchenden Thaler, so ist ihr Korn ${}^3/_4\,x$. Da $31920^1/_6$ Stücke geprägt werden sollen, so ist ihr Bruttogewicht $31920 \cdot \frac{64}{175} = \frac{912 \,.\, 64}{5}$ und daher das Schrot der zu suchenden Silbergroschen $= \frac{912 \,.\, 64}{5} - x$ und ihr Korn $\left(\frac{912 \,.\, 64}{5} - x\right)\frac{2}{9}$. Das Korn aber der $31920^1/_6$ Stücke ist $= 31920 \cdot \frac{4}{21} = 1520 \,.\, 4$. Daher erhält man für den Feingehalt folgende Gleichung

$$\frac{3}{4}x + \left(\frac{912 \,.\, 64}{5} - x\right)\frac{2}{9} = 31920 \cdot \frac{4}{21} = 1520 \,.\, 4.$$

Dividirt man in die Zahl des gefundenen Bruttogewichts aller Thaler mit dem Bruttogewicht des einzelnen Thalers, so erhält man die Anzahl der gesuchten Thaler. — Man könnte die Aufgabe auch als Gleichung mit zwei Unbekannten rechnen, wenn man die Anzahl der zu suchenden Thaler und die der Silbergroschen mit y bezeichnete.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

13. Heis 233. Sind x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ die vier auf einander folgenden gesuchten Zahlen, so sind ihre vierten Potenzen

$$(x+3)^4=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$$
$$(x+2)^4=x^4+\ 8x^3+24x^2+\ 32x+16$$
$$(x+1)^4=x^4+\ 4^3x+\ 6x^2+\ \ 4x+\ 1$$
$$x^4=x^4 \text{ und ihre Differenzen}$$

oder
$$(x+3)^4-(x+2)^4=4x^3+30x^2+76x+65$$
$$(x+2)^4-(x+1)^4=4x^3+18x^2+28x+15$$
$$(x+1)^4-\qquad x^4=4x^3+\ 6x^2+\ 4x+\ 1.$$

Bildet man von den Ausdrücken rechter Hand abermals die Differenzen, so erhält man die beiden Ausdrücke

$$12x^2+48x+50$$
$$\text{und } 12x^2+24x+14$$
$$\text{und ihre Differenz } 24x+36.$$

Da diese Differenz bekannt und $=204$ ist, so ist die Gleichung $24x+36=204$.

§. 64.

Ueber die Discussion der Gleichungen im Allgemeinen und der des ersten Grades im Besondern.

Wenn für eine ganze Klasse von Aufgaben die allgemeine Buchstabengleichung gefunden und aufgelöst ist, so muß, wenn der Lösung Nichts fehlen soll, die Endgleichung oder der Werth der Unbekannten noch einer besondern Betrachtung unterworfen werden, welche die Discussion der Aufgabe oder Gleichung genannt wird. Dieses Raisonnement wird, wie wir später bei den Gleichungen höherer Grade sehen werden, von besonderer Wichtigkeit, um die Anzahl der Wurzeln zu bestimmen, um Kriterien durch dasselbe für die Realität oder Rationalität der Wurzeln zu erhalten, um bei geometrischen Aufgaben die verschiedenen positiven und negativen Werthe richtig deuten und construiren zu können; sie spielt jedoch auch schon bei den Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten keine unbedeutende Rolle und hat namentlich über folgende Punkte bestimmte Aufklärung zu geben:

a. Wann erhält man ein positives oder negatives Resultat? Hat das negative Resultat bei einer Aufgabe keinen Sinn, so erhält man dadurch zugleich eine Bedingung für die Möglichkeit. Hat das negative Resultat jedoch einen Sinn, was jedesmal der Fall sein wird, wenn ein Richtungsgegensatz des Raumes oder der Zeit in Betracht kommt, so deutet dasselbe bestimmt an, daß die Lösung in diesem Falle nicht in der Richtung der Frage, sondern in der ihr entgegengesetzten Richtung liegt. Wird bei Zeitaufgaben nach Jahren in der Zukunft gefragt und die Endgleichung gibt ein negatives Resultat, so deutet dasselbe auf eine Lösung in der Vergangenheit, wenn diese nach der

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Natur der Aufgabe stattfinden kann. Man würde in diesem Falle ein positives Resultat erhalten haben, wenn man nach Jahren der Vergangenheit gefragt hätte. Wird bei Raumgrößen nach dem zukünftigen Zusammentreffen zweier Körper gefragt und setzt man voraus, daß ihre Bewegungen nicht von einem bestimmten Zeitpunkte angefangen, sondern sich nur fortgesetzt haben, so deutet ein negatives Resultat auf ein schon stattgehabtes Zusammentreffen in der Vergangenheit. Auch in diesem Falle kann man durch Aenderung des Ausdrucks der Aufgabe das negative Resultat in ein positives verwandeln.

b. Wann erhält man einen Ausdruck von der Form $\frac{a}{0} = \infty$?

Ein Resultat, das andeutet, daß unter bestimmten Verhältnissen und Bedingungen das Resultat in endlichen Zahlen unmöglich ist.

c. Wann erhält man einen Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$?

d. h. einen Ausdruck, der andeutet, daß das gesuchte Resultat unter gewissen Voraussetzungen und Bedingungen vollständig unbestimmt ist und daß jede Zahl dafür gesetzt werden kann.

Wir wollen diese allgemeine etwas abstracte Erörterung über die Bedeutung der Discussion an einem Beispiele unserer Sammlung ausführlicher und anschaulicher darlegen, um ihr mehr Leben zu verschaffen, können jedoch die specielle Discussion einzelner Aufgaben unserer Sammlung um so eher unterlassen, da sie in den Lösungen zu den Aufgaben vollständig, wenn gleich in einer etwas kurzen und für den Anfänger zuerst schwer verständlichen Form enthalten ist. Hier heißt es mit Recht: „Lieber etwas zu wenig als zu viel.“ Dem mathematischen Kopfe ist Weniges genügend, dem nicht mathematischen Kopfe ist die größte Breite noch zu kurz.

Beispiel einer Discussion Heis 98: A ist jetzt m, B n Jahr alt. Nach wie viel Jahren wird A $q$mal so alt sein als B oder vor wie viel Jahren war A $q$mal so alt als B?

Wird die Gleichung für die erste Frage gebildet und aufgelöst, so erhalten wir als Endgleichung

$$x = \frac{nq - m}{1 - q} = \frac{m - nq}{q - 1}.$$

Aus dieser Endgleichung ergibt sich:

1. Wenn $q = 1$ und $n \lessgtr m$ ist, so wird $x = \frac{n - m}{0} = \infty$, wie es die Natur der Aufgabe erfordert. Denn wenn A m Jahre und B n Jahre alt ist, so kann das Verhältniß ihrer Jahre, wenn beiden dieselben Zahlen zugelegt werden, nie wieder dasselbe sein (§. 32, 10, d.).

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

2. Wenn $q=1$ und $m=n$ ist, so wird $x=\frac{0}{0}$ d. h. ein vollständig unbestimmter Ausdruck, dem durch jede beliebige Zahl Genüge geschieht, wie es gleichfalls die Natur der Aufgabe fordert. Denn wenn A und B gleich alt sind, so behalten sie in alle Ewigkeit dasselbe Altersverhältniß.

3. Ist $nq \gtrless m$ und zugleich $1 \gtrless q$ oder ist

$$q \gtrless \frac{m}{n} \text{ und zugleich } 1 \gtrless q,$$

so ist x positiv und die Aufgabe in der geforderten Weise zu beantworten. Ist dagegen $nq \lessgtr m$ und zugleich $1 \gtrless q$, so wird x negativ und die Antwort liegt dann nicht in der Zukunft, sondern in der Vergangenheit und wird in ihr noch so lange möglich sein, als das Resultat $\frac{nq-m}{1-q}$ kleiner als m oder n ist.

Für die größere Zahl der Schüler wird die Discussion einer Aufgabe wenig Interesse bieten und der Lehrer darf sich darum nicht zu lange bei ihr aufhalten; für den künftigen Mathematiker genügt ein Fingerzeig, um ihn zu vollständigem Nachdenken anzuregen. —

§. 65.
Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1. Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten ist vom ersten Grade, wenn nach ihrer Entwicklung in ihr weder Producte noch höhere Potenzen der Unbekannten vorkommen. Denn Producte von Unbekannten führen ebensogut wie Potenzen derselben bei der Auflösung auf Gleichungen höherer Grade. Die allgemeine Form der Gleichungen mit mehreren Unbekannten vom ersten Grade ist demnach:

$$Ax+By+Cz+\ldots\ldots+N=0 \text{ oder } Ax+By+Cz+\ldots=N.$$

In dieser allgemeinen Form können die Coefficienten A, B, C jede beliebige Zahl und selbst Null sein. Da jedoch nach §. 60, 17 sämmtliche Divisoren aus einer Gleichung fortgeschafft werden können, so mögen A, B, C nur ganze Zahlen bedeuten.

2. Gleichungen mit mehreren Unbekannten heißen zusammengehörig, wenn alle Unbekannten in ihnen denselben Werth haben oder dieselben Größen ausdrücken.

3. Eine Gleichung heißt abhängig von andern zusammengehörigen Gleichungen, wenn sie sich aus ihnen durch irgend eine arithmetische Operation gebildet hat. So ist z. B. $14x+20q-2z=114$ von den beiden

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Gleichungen $2x + 3y - 4z = 25$ und $5x + 7y + 3z = 32$ abhängig, da sie das Doppelte ihrer Summe ist.

4. Zusammengehörige Gleichungen widersprechen einander, wenn dieselben Größenverbindungen in ihnen verschiedene, d. h. sich widersprechende Resultate geben. So sind z. B. $3x - 2y = 5$ und $6x - 4y = 9$ sich widersprechende Gleichungen, da sie für $3x - 2y$ die widersprechenden Resultate 5 und $4^1/_2$ geben.

5. Wenn aus Gleichungen mit mehreren Unbekannten die Unbekannten gefunden werden sollen, so müssen ebensoviele von einander unabhängige, sich nicht widersprechende Gleichungen gegeben sein, als Unbekannte in ihnen vorhanden sind. Sind weniger Gleichungen als Unbekannte vorhanden, so enthält die Lösung für die gesuchte Unbekannte selbst noch eine oder mehrere Unbekannte. Sind die Gleichungen von einander abhängig, so führt ihre Lösung zu einer einfachen identischen Gleichung, z. B. $b = b$ ohne Unbekannte. Enthalten die Gleichungen dagegen einen wenn auch noch so versteckten Widerspruch, so führt ihre Lösung auf einen nackten Widerspruch, z. B. $4 = 5$ gleichfalls ohne Unbekannte. —

6. Aus zwei zusammengehörigen Gleichungen mit einer gemeinschaftlichen Unbekannten eine neue Gleichung ableiten, in der die gemeinschaftliche Unbekannte nicht vorkommen soll, heißt die fragliche Unbekannte aus den Gleichungen eliminiren.

7. Soll aus zwei zusammengehörigen Gleichungen eine Unbekannte eliminirt werden, so erhält man die neue Gleichung entweder durch das Substitutions- oder Combinations- oder durch das Additions- und Subtractions- (englisches) oder endlich durch das Bezout'sche (französische) Verfahren.

8. Durch Substitution wird eine Unbekannte eliminirt, wenn man eine Gleichung für sie auflöst und ihren Werth in die andere Gleichung für sie an die Stelle setzt (substituirt). Aus den Gleichungen $ax + by = m$ und $dx + ey = n$ wird x eliminirt, wenn man z. B. die erste Gleichung für x auflöst und ihren Werth $x = \frac{m - by}{a}$ in der zweiten Gleichung für x substituirt, was die Gleichung $d \cdot \frac{m - by}{a} + ey = n$ gibt, in der nur y vorkommt.

9. Durch Combination wird eine Unbekannte eliminirt, wenn man beide Gleichungen für sie auflöst und ihre Werthe zu einer neuen Gleichung verbindet. Aus den Gleichungen $5x - 7y = 20$ und $9x - 11y = 44$ wird die Größe y eliminirt, wenn man beide Gleichungen für y auflöst und

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

ihre Werthe $y = \frac{5x - 20}{7}$ und $y = \frac{9x - 44}{14}$ zu der neuen Gleichung $\frac{5x - 20}{7} = \frac{9y - 44}{14}$ verbindet.

10. Durch Addition oder Subtraction wird eine Unbekannte eliminirt, wenn man sie nöthigenfalls in beiden Gleichungen durch Multiplication mit denselben Coefficienten versieht und die so umgeformten Gleichungen addirt oder subtrahirt, je nachdem die zu eliminirende Größe in beiden Gleichungen ungleiche oder gleiche Vorzeichen hat. — Soll aus beiden Gleichungen $x + 13y = 176$ und $x + 7y = 98$ die Größe x eliminirt werden, so subtrahire man die Gleichungen, da x in beiden Gleichungen gleiche Coefficienten und Vorzeichen hat und man erhält als neue Gleichung $6y = 78$. Soll dagegen y aus ihnen eliminirt werden, so muß vor der Subtraction, um y in beiden Gleichungen mit gleichen Coefficienten zu versehen, die erste Gleichung mit 7 und die zweite Gleichung mit 13 multiplicirt werden.

11. Durch das Bezout'sche oder französische Verfahren wird eine Unbekannte eliminirt, wenn man eine der gegebenen Gleichungen mit einer willkürlichen Größe (m) multiplicirt, die andere ungeänderte Gleichung von ihr subtrahirt und die Größe m so bestimmt, daß bei der Subtraction der Coefficient der zu eliminirenden Unbekannten zu Null wird.

Sind $3x - 7y = 50$ und $2x + 3y = 87$ die gegebenen Gleichungen, aus denen x eliminirt werden soll, so multiplicire man die erste etwa mit m, wodurch man die Gleichung $3mx - 7my = 50m$ erhält. Zieht man von ihr die Gleichung $2x + 3y = 87$ ab, so erhält man

$$(3m - 2)x - (7m + 3)y = 56m - 87.$$

Bestimmt man nun m so, daß $3m - 2 = 0$ wird, oder $m = \frac{2}{3}$ ist, so wird der Coefficient von x zu Null oder x fällt aus der Gleichung fort und man erhält $-\left(7 \cdot \frac{2}{3} + 3\right)y = 50 \cdot \frac{2}{3} - 87$ als Gleichung für y. Theoretisch betrachtet ist das eine Einmaleinsverfahren so einfach wie das andere, aber in der Praxis findet zwischen ihrer Anwendung ein großer Unterschied statt.

12. Soll eine Unbekannte aus mehreren Gleichungen eliminirt werden, so verbinde man irgend eine Gleichung mit allen übrigen, oder jede Gleichung mit der folgenden; eliminire aus jeder dieser Verbindungen die Unbekannte, so erhält man eine Gleichung und eine Unbekannte weniger, also aus n Gleichungen mit n Unbekannten $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten.

13. Sollen alle Unbekannte bis auf eine aus n Gleichungen eliminirt werden, so multiplicire man die ersten $(n - 1)$ Gleichungen mit $(n - 1)$ **Willkürlichen, ziehe von ihrer Summe die letzte unveränderte Gleichung ab, so erhält man eine neue Gleichung mit n Unbekannten.** Setzt man in ihr die

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Coefficienten aller Unbekannten bis auf eine, die gefunden werden soll = 0, so erhält man (n — 1) Bestimmungsgleichungen für die Willkürlichen und aus ihnen ihre Werthe. Setzt man diese in die Gleichung für die zu bestimmende Unbekannte, so findet man ihren Werth unmittelbar. — Später wird ein Beispiel von diesem Verfahren gegeben werden. —

14. Soll eine Gleichung mit mehreren n Unbekannten aufgelöst werden, so eliminire man eine Unbekannte nach der andern, bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten kommt, löse diese für die in ihr vorkommende Unbekannte auf und substituire ihren Werth in einer Gleichung mit zwei Unbekannten. Hierauf löse man diese Gleichung für die zweite Unbekannte auf und substituire die beiden gefundenen Werthe in einer Gleichung mit drei Unbekannten und fahre mit diesen Substitutionen und Auflösungen so lange fort, bis sämmtliche Unbekannte bestimmt sind.

15. Praktische Andeutungen für die bequemste Lösung. Die Unbekannten können in der Theorie in jeder beliebigen Reihenfolge durch jedes der oben gezeigten Verfahren eliminirt werden, in der Praxis aber, wo es auf wirklich ausgeführte und nicht allein in Zeichen angedeutete Rechnungen ankommt, beachte man folgende Winke zur Erleichterung der Rechnung:

a. Man ordne sämmtliche Gleichungen auf dieselbe Weise an, damit Coefficienten und Vorzeichen bei denselben Größen deutlicher hervortreten.

b. Man eliminire die Größe, welche die zur Elimination bequemsten Coefficienten hat.

c. Man bringe nach jeder Elimination die neue Gleichung auf die einfachste Gestalt.

d. Nur bei ganz einfachen Gleichungen mit zwei Unbekannten kann man das Substitutionsverfahren anwenden, das Combinationsverfahren nur bei solchen Gleichungen, in denen die zu eliminirende Größe keine Coefficienten hat. Für die verwickelten Gleichungen mit mehreren Unbekannten paßt allein das Additions- oder Subtractions- oder bei allgemeinen Buchstabengleichungen das Bezout'sche Verfahren.

e. Kann durch Einführung von Hülfsgrößen, zu denen auch die umgekehrten Werthe der gesuchten Größen gehören, die Gleichung bequemer gelöst werden, so löse man die Gleichungen erst für diese Hülfsgrößen auf und bestimme aus den so gefundenen neuen Gleichungen die Hauptgrößen selbst.

f. Bei der Auflösung versehe man, um den ganzen Gang der Entwicklung deutlich übersehen zu können, nicht nur die ursprünglich gegebenen Gleichungen mit Stellenzahlen (1) (2) .... sondern auch alle diejenigen neu hinzutretenden Gleichungen, deren man für die fernere Umformung und endliche Lösung bedarf, und deute an diesen Stellenzahlen durch

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

die arithmetischen Operationszeichen kurz an, auf welche Weise und durch welche Operationen sich jede neue Gleichung aus den früheren gebildet hat.

g. Bei Gleichungen mit großen Zifferncoefficienten ist es vortheilhaft, während der Entwicklung für dieselben einfache Buchstaben einzuführen, um sich vor Schreibfehlern zu sichern. Z. B. in Aufgabe 12 setze man $1{,}543689 = a$ und $0{,}8392867 = b$, löse die Buchstabengleichungen $ax - y = a$

und $x - by = b$ auf und vollziehe die Zifferrechnung erst an ihren Lösungsformeln. Ebenso verfahre man bei Aufgabe 16, indem man $3{,}14159 = \pi$; $10{,}86959 = \pi^2$ und $8{,}86959 = \pi^2 - 2$ setzt.

h. Bei Gleichungen, die summirt dieselben Coefficienten geben, bilde man die Summengleichung, dividire sie beiderseits durch den gemeinschaftlichen Coefficienten aller Unbekannten, um eine Hülfsgleichung ohne Coefficienten zu erhalten, die zur Elimination sehr bequem benutzt werden kann. Auf diese Weise verfahre man mit Gleichung 88, 112 und 113, nachdem man die letzteren durch das Product der rechten Seite dividirt hat. Dies Verfahren der Summirung kann auch bequem angewendet werden, wenn dadurch, wie in 109, auf einmal mehrere Unbekannnte eliminirt werden.

Beispiel: Auflösung einer Gleichung mit vier Unbekannten:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & x - 2y + 3z - 4u = -10 & \\
(2) & -5x + 6y - 7z + 8u = 18 & \\
(3) & 9x - 10y - 11z + 12u = 4 & \\
(4) & -13x + 14y + 15z - 16u = -4 & \\
\hline
(5) & -y + 2z - 3u = -8 & = \dfrac{(2)+5.1}{4} \\
(6) & -4y + 19z - 24u = -47 & = \dfrac{9.(1)-(3)}{2} \\
(7) & -6y + 27z - 34u = -67 & = \dfrac{13.(1)+(4)}{2} \\
\hline
(8) & 11z - 12u = -15 & = (6) - 4(5) \\
(9) & 15z - 16u = -19 & = (7) - 6.(5) \\
\hline
(10) & z = 3 & = 3.(9) - (4.8) \\
 & 33 - 12u = -15 & \\
(11) & u = 4 \text{ durch Substitution in (8)} & \\
 & -y + 6 - 12 = -8 & \\
(12) & y = 2 \text{ durch Substitution in (5)} & \\
 & x - 4 + 9 - 16 = -10 & \\
(13) & x = 1 \text{ durch Substitution in (1)} &
\end{array}
$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiel: Auflösung einer Gleichung mit fünf Unbekannten:

$$\begin{aligned}
b+c+d+e+f&=\frac{5}{6}\\
32b+16c+8d+4e+2f&=23\frac{1}{3}\\
243b+81c+27d+9e+3f&=154\frac{1}{2}\\
1024b+256c+64d+16e+4f&=617\frac{1}{3}\\
3125b+625c+125d+25e+5f&=1820\frac{5}{6}\\
\hline
30b+14c+6d+2e&=20\frac{2}{3}\\
240b+78c+24d+6e&=152\\
1020b+252c+60d+12e&=614\\
3120b+620c+120d+20e&=1816\frac{2}{3}\\
\hline
750b+36c+6d&=90\\
480b+168c+24d&=490\\
2820b+480c+60d&=1610\\
\hline
240b+24c&=130\\
1320b+120c&=710\\
\hline
120b&=60\\
\hline
\end{aligned}$$

$$b=\frac{1}{2};\ c=\frac{5}{12};\ d=0;\ e=\frac{1}{12};\ f=0.$$

§. 66.

Ableitung und Bildungsgesetz der allgemeinen Formeln für die Lösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

1. Nachdem im vorigen §. das Verfahren bei der Elimination und Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten im Allgemeinen erörtert und an vielen verschiedenartigen Zahlen- und Buchstabengleichungen tüchtig eingeübt ist, wobei die Elimination durch Addition und Subtraction die wichtigsten Dienste geleistet hat, muß in diesem §. die allgemeine Auflösungsformel für die Gleichungen mit mehreren Unbekannten gesucht werden, einmal um dadurch in den Stand gesetzt zu werden, jede Unbekannte unmittelbar aus den Coefficienten und dem bekannten Gliede finden zu können, ohne jedesmal den langen Weg der Elimination einschlagen zu müssen; dann aber auch, um das bestimmte Gesetz, in welchem die Abhängigkeit der Unbekannten von den gegebenen Größen ausgeprägt ist, kennen zu lernen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Zu diesem Zweck bedürfen wir einer einfachen und streng wissenschaftlichen Bezeichnung und der Bezout'schen Eliminationsmethode, durch welche alle Unbekannte, bis auf eine, auf einmal eliminirt werden können.

Wir bezeichnen daher die zu den Unbekannten x, y, z u. s. w. in den Gleichungen (1) (2) (3) zugehörigen Coefficienten mit $a, a', a'' \ldots b, b', b'' \ldots c, c', c'' \ldots$ und die bekannten Glieder mit m, m', m'', so ist die allgemeine Form der Gleichungen mit mehreren Unbekannten

$$(1)\ a\,x + b\,y + c\,z \ldots = m$$
$$(2)\ a'x + b'y + c'z \ldots = m'$$
$$(3)\ a''x + b''y + c''z \ldots = m'' \text{ u. s. w.}$$

2. Ableitung und Bildungsgesetz der allgemeinen Auflösungsformel für Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Sind (1) $a\,x + b\,y = m$

und (2) $a'x + b'y = m'$, die gegebenen Gleichungen, so multiplicire man die Gleichung (1) mit dem willkürlichen Factor α und subtrahire die Gleichung (2) von der so veränderten Gleichung, um Gleichung (3) $(a\alpha - a')x + (b\alpha - b')y = m\alpha - m'$ zu erhalten. Setzt man nun, um x zu finden $b\alpha - b' = 0$ oder $\alpha = \frac{b'}{b}$ so ist $x = \frac{m\alpha - m'}{a\alpha - a'}$. Substituirt man in ihr den für α gefundenen Werth, so erhält man $x = \frac{\frac{mb'}{b} - m'}{\frac{a\,b'}{b} - a'} = \frac{mb' - bm'}{ab' - ba'}$. Durch ein ähnliches Eliminationsverfahren erhält man für y den Werth $y = \frac{am' - ma'}{ab' - ba'}$.

Betrachtet man Zähler und Nenner, der für x und y gefundenen Werthe genauer, so zeigt sich folgendes einfache Gesetz:

a. Um den beiden Werthen gemeinschaftlichen Nenner zu erhalten, bilde man aus den Permutationen der beiden Coefficienten a und b die beiden Producte ab und ba, trenne sie durch das — Zeichen $(ab - ba)$ und markire den zweiten Buchstaben $(ab' - ba')$.

b. Um aus dem Nenner den zu jeder Unbekannten gehörenden Zähler zu finden, ersetze man den Coefficienten der fraglichen Unbekannten durch die bekannte Größe mit derselben Stellenzahl oder Marke, welche der Coefficient hatte. Demgemäß erhält man aus $ab' - ba'$ für x den Zähler $mb' - bm'$ und für y den Zähler $am' - ma'$.

3. Ableitung und Bildungsgesetz der allgemeinen Formel für Gleichungen mit drei Unbekannten.

Sind $\left\{\begin{array}{l}(1)\ ax + by + cz = m \\ (2)\ a'x + b'y + c'z = m' \\ (3)\ a''x + b''y + c''z = m''\end{array}\right\}$ die gegebenen Gleichungen,

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

so multiplicire man die erste Gleichung mit α und die zweite mit β, subtrahire von den so veränderten Gleichungen die dritte ungeänderte Gleichung, so erhält man $(a\alpha + \beta a' - a'')x + (b\alpha + b'\beta - b'')y + (c\alpha + c'\beta - c'')z = m\alpha + m'\beta - m''$.

Will man nun x bestimmen, so setze man die Coefficienten von y und $z = 0$ oder $b\alpha + b'\beta = b''$ und $c\alpha + c'\beta = c''$, so erhält man (nach 2) $\alpha = \frac{b'c'' - b''c'}{b'c - bc'}$; $\beta = \frac{b''c - bc''}{b'c - bc'}$.

Setzt man diese Werthe für α und β in die Formel für $x = \frac{m\alpha + m'\beta - m''}{a\alpha + a'\beta - a''}$

so ist $x = \dfrac{m\dfrac{b'c'' - b''c'}{b'c - bc'} + m'\dfrac{b''c - bc''}{b'c - bc'} - m''}{a\dfrac{b'c'' - b''c'}{b'c - bc'} + a'\dfrac{b''c - bc''}{b'c - bc'} - a''}$ oder vereinfacht

$$x = \frac{m(b'c'' - b''c') + m'(b''c - bc'') - m''(b'c - bc')}{a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') - a''(b'c - bc')}$$
$$= \frac{m(b'c'' - b''c') + m'(b''c - bc'') + m''(bc' - b'c)}{a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c)}.$$

Um das Gesetz bequemer in Worten ausdrücken zu können, löse man die Klammern auf und ordne die Factoren so, daß die Stellenzahlen und nicht die Buchstaben in natürlicher Ordnung folgen, so ist

$$x = \frac{mb'c'' - mc'b'' + cm'b'' - bm'c'' + bc'm'' - cb'm''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man für y und z

$$y = \frac{am'c'' - ac'm'' + ca'm'' - ma'c'' + mc'a'' - cm'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$
$$z = \frac{ab'm'' - am'b'' + ma'b'' - ba'm'' + bm'a'' - mb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Betrachtet man auch hier, wie bei den Formeln für zwei Unbekannte, Zähler und Nenner der für x, y und z gefundenen Werthe genauer, so zeigt sich folgendes analoge Gesetz für die Bildung derselben. —

a. Um den, allen drei Werthen für x, y, z gemeinschaftlichen Nenner zu erhalten, nehme man den der Gleichung für zwei Unbekannte entsprechenden Nenner $ab - ba$, führe in ihm in jedem Gliede den Coefficienten c an jeder Stelle von rechts angerechnet ein und wechsele mit den Vorzeichen ab, so erhält man $abc - acb + cab - bac + bca - cba$. Setzt man nun in jedem Gliede die Stellenzahlen in natürlicher Ordnung den Buchstaben bei, so erhält man den Nenner $ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''$.

b. Um aus dem Nenner den zu jeder Unbekannten gehörenden Zähler zu finden, ersetze man den Coefficienten der fraglichen Unbekannten

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

durch das bekannte Glied, mit derselben Stellenzahl, welche der Coefficient im Nenner hat. Demgemäß erhält man

für x den Zähler $mb'c''-mc'b''+cm'b''-bm'a''+cb'm''-bc'm''$

„ y „ „ $am'c''-ac'm''+ca'm''-ma'c''+mc'a''-cm'a''$

„ z „ „ $ab'm''-am'b''+ma'b''-ba'm''+bm'a''-mb'a''$

Dieses Gesetz, nach dem der Nenner der Formeln für die Unbekannten sich aus den Permutationen der Coefficienten der Unbekannten nach der oben beschriebenen Weise bildet, gilt auch für vier und mehr Unbekannte. Der allgemeine Beweis dafür, der sich mit Hülfe der Bezout'schen Eliminationsmethode führen läßt, überschreitet zwar nicht die Grenzen der elementaren Betrachtung, würde jedoch zu weitläufig sein und zu wenig praktischen Nutzen gewähren, als daß es sich der Mühe lohnen sollte, ihn in einem Leitfaden durchzuführen. Wenn das Gesetz, wie wir voraussetzen wollen, allgemein gültig ist, wie viele Glieder wird dann der Nenner für vier Unbekannte haben und in welcher Reihe werden sie auf einander folgen? Wie wird der Zähler für jede Unbekannte gefunden werden?

Beispiel: Zur Veranschaulichung des Gebrauchs der Formel wählen wir Beispiel 86 unserer Sammlung mit drei Unbekannten. In den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} 3x-5y+4z=5 \\ 7x+2y-3z=2 \\ 4x+3y-z=7 \end{array}\right\}\ \text{ist}\ \begin{array}{|l|l|l|l} a=3 & b=-5 & c=4 & m=5 \\ a'=7 & b'=2 & c'=-3 & m'=2 \\ a''=4 & b''=3 & c''=-1 & m''=7. \end{array}$$

Daher

$$x=\frac{5.2.(-1)-5(-3).3+4.2.3-(-5)2.(-1)+(-5)(-3)7-4.2.7}{3.2.(-1)-3(-3).3+4.7.3-(-5)7.(-1)+(-5)(-3)4-4.2.4}$$

$$=\frac{-10+45+24-10+105-56}{-6+27+84-35+60-32}=\frac{98}{98}=1.$$

§. 67.

Erklärung einiger Aufgaben, die auf Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten führen und Bildung der zu ihrer Lösung nöthigen Gleichungen.

Die Aufsuchung und Aufstellung der zur Lösung von Aufgaben mit mehreren Unbekannten nöthigen Gleichungen geschieht auf dieselbe Weise wie bei Aufgaben mit einer Unbekannten, und bedarf keiner neuen Erklärung. Es wird genügen, einige schwierigere Aufgaben unserer Sammlung vollständig zu erklären und die zu ihnen gehörigen Gleichungen aufzustellen, um dem Anfänger für ähnliche Aufgaben und Betrachtungen den Weg zu zeigen, den er beim selbstständigen Nachdenken über Aufgaben einzuschlagen hat.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

1. Aufgabe. Heis, 12. A und B geben zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte, welches einen jährlichen Gewinn von $7\frac{1}{2}$ Procent abwirft, zusammen 10000 Gulden her. A läßt sein Geld 1 Jahr 3 Monate, B das seinige 2 Jahr 11 Monate stehen. Wenn nun nach diesen Zeiten der Gewinn für beide gleich groß ist, wie viel betrug eines Jeden Einlage?

Ist die Einlage von $A = x$, und von $B = y$ Thaler, so ist Gleichung I. $x + y = 10000$. Der Gewinn des A ist $\frac{7\frac{1}{2}}{100} \cdot \frac{5}{4} \cdot x$ und der Gewinn des B $\frac{7\frac{1}{2}}{100} \cdot 2\frac{11}{12}\, y$, daher die Gleichung II. $\frac{7\frac{1}{2}}{100} \cdot 2\frac{11}{12} y = \frac{7\frac{1}{2}}{100} \cdot \frac{5}{4}\, x$ = vereinfacht $2\frac{11}{12}\, y = \frac{5}{4} x$.

2. Aufgabe. Heis, 47. Zwei Körper haben die Entfernung von d Fuß. Bewegen sie sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander, so treffen sie nach m Secunden zusammen; bewegen sie sich aber mit derselben Geschwindigkeit hintereinander, so treffen sie nach n Secunden zusammen. Wie viel Fuß legt jeder der Körper in einer Secunde zurück?

Bezeichnet man die beiden Körper, die sich in A und B befinden mögen, mit A und B, ist $AB = d$ und die Geschwindigkeit von $A = x$ und von $B = y$ Fuß in einer Secunde; so haben A und B nach m Secunden mx und my Fuß zurückgelegt. Da sie nun zusammentreffen, also die ganze Strecke d zusammen zurückgelegt haben, so ist die Gleichung I. $mx + my = d$ oder $x + y = \frac{d}{m}$. Gehen sie aber in der Richtung von AB oder BA hintereinander her und holt der eine den andern in n Secunden in C' oder C'' ein, so haben A und B nx und ny Fuß zurückgelegt. Da sie nun ursprünglich d Fuß von einander entfernt waren, so ist entweder Gleichung II.

$$nx - ny = d \quad \text{oder} \quad ny - nx = d$$
$$x - y = \frac{d}{n} \qquad\qquad y - x = \frac{d}{n}.$$

Welche Beziehung muß zwischen den Geschwindigkeiten von A und B stattfinden, wenn die Aufgabe möglich sein soll?

3. Aufgabe. Heis, 49. Ein Körper geht mit gleichförmiger Geschwindigkeit von einem Punkte A nach einem d Fuß entfernt gelegenen Punkte B und geht, ohne zu ruhen, mit derselben Geschwindigkeit wieder von B nach A zurück. t Secunden später geht ein zweiter Körper von B nach A mit ebenfalls gleichförmiger aber geringerer Geschwindigkeit und trifft in m Secunden nach seinem Abgange zum ersten Male und in n Secunden nach seinem Abgange zum zweiten Male mit dem ersten Körper zusammen. Wie viel Fuß legt jeder der Körper in einer Secunde zurück?

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Bezeichnet man die größere Geschwindigkeit des Körpers A mit x und die kleinere Geschwindigkeit des B mit y, so hat beim ersten Zusammentreffen nach m Minuten nach dem Abgange von B, der Körper A, der t Secunden früher abgegangen ist $(m + t)$ Secunden gebraucht und $(m + t)x$ Fuß zurückgelegt, während der Körper B in m Secunden nur my Fuß zurückgelegt hat. Da sie nun beide die ganze Entfernung zusammen zurückgelegt haben, so ist die Gleichung I. $(m + t)x + my = d$.

Beim zweiten Zusammentreffen nach n Secunden nach dem Abgange des B hat der Körper A $(n + t)$ Secunden gebraucht und $(n + t)x$ Fuß zurückgelegt, während B nur ny Fuß zurückgelegt hat. Da beim zweiten Zusammentreffen der Körper A nicht nur den Weg nach B, sondern außerdem auch die ganze Strecke d zurückgelegt hat, so ist die Gleichung II. $(n + t)x - ny = d$.

4. Aufgabe. Heis, 56. Wenn 21 Zweithalerstücke und 49 Thalerstücke zusammen 4 Pfund wiegen und zusammengeschmolzen 13löthiges Silber geben, und wenn in den Zweithalerstücken Silber und Kupfer in dem Verhältniß von 9 : 1, in den Thalerstücken in dem Verhältnisse 3 : 1 legirt ist, wie viel Zweithalerstücke und wie viel Thalerstücke gehen auf 5 Pfund?

Hat das Zweithalerstück x und das Thalerstück y Loth Gewicht, so sind in dem Zweithalerstück $\frac{9}{10}x$ Loth und in dem Thalerstück $\frac{3}{4}y$ Loth Silber, sowie $\frac{1}{10}x$ und $\frac{1}{4}y$ Loth Kupfer enthalten. In 21 Zweithalerstücken und in 49 Thalerstücken ist demnach $21 \cdot \frac{9}{10}x + 49 \cdot \frac{3}{4}y$ Silber und $21 \cdot \frac{1}{10}x + 49 \cdot \frac{1}{4}y$ Kupfer enthalten. Da die Mischung von 4 Pfund 13löthiges Silber ist, so sind in ihr 104 Loth Silber und 24 Loth Kupfer enthalten. Demnach erhält man für die Aufgabe leicht folgende drei Gleichungen:

$$(1)\quad 21x + 49y = 160 \quad \text{Gleichung für Schrot}$$

$$(2)\quad 21 \cdot \frac{9}{10}x + 49 \cdot \frac{3}{4}y = 104 \quad \text{„ „ Korn}$$

$$(3)\quad 21 \cdot \frac{1}{10}x + 49 \cdot \frac{1}{4}y = 24 \quad \text{„ „ Kupfer,}$$

von denen zwei beliebig verbunden werden können, um die Aufgabe zu lösen.

5. Aufgabe. Heis, 60. Mit einem Metallgemische von 300 Pfund, welches aus 2 Theilen Zink, 3 Theilen Kupfer und 4 Theilen Zinn besteht, werden 200 Pfund eines andern, aus denselben Stoffen bestehenden Metallgemisches zusammengeschmolzen. In der hierdurch erhaltenen Legirung finden sich 3 Theile Zink, 4 Theile Kupfer und 5 Theile Zinn. In welchem Verhältnisse befinden sich Zink, Kupfer und Zinn in dem zugesetzten Metallgemische?

Sind in dem zugesetzten Metallgemische x Pfund Zink, y Pfund Kupfer und z Pfund Zinn, so ist die Gleichung I. $x + y + z = 200$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Da nun in dem Metallgemische von 200 Pfund sich Zink : Kupfer : Zinn $= 2 : 3 : 4$, so ist in ihm $\frac{2}{9} \cdot 300$ Pfund Zink, $\frac{3}{9} \cdot 300$ Pfund Kupfer, und $\frac{4}{9} \cdot 300$ Pfund Zinn oder $66^2/_3$ Pfund Zink, 100 Pfund Kupfer und $133^1/_3$ Pfund Zinn enthalten. In der Legirung befinden sich demnach $(66^2/_3 + x)$ Pfund Zink, $(100 + y)$ Pfund Kupfer und $(133^1/_3 + z)$ Pfund Zinn. Da nun in ihr Zink : Kupfer : Zinn $= 3 : 4 : 5$ sein soll, so erhält man die fortlaufende Proportion $(66^2/_3 + x) : (100 + y) : (133^1/_3 + z) = 3 : 4 : 5$ und aus ihr Gleichung

$$\text{II. } (66^2/_3 + x)\,4 = (100 + y)\,3$$
$$\text{III. } (100 + y)\,5 = (133^1/_3 + z)\,4.$$

6. Aufgabe. Heis, 62. Ein Dampfschiff legt a Meilen stromaufwärts und b Meilen stromabwärts, zusammen in der Zeit t, ein ander Mal legt dasselbe a' Meilen aufwärts und b' Meilen abwärts in der Zeit t' zurück. Wie viel Meilen legt das Schiff 1, in einem ruhigen Wasser, bloß durch die Kraft seiner Maschine, 2, ohne Maschine bloß durch den Strom getrieben in der Zeiteinheit im Mittel zurück?

Setzt man die Wirkung der Dampfkraft $= x$ und die der Wasserkraft $= y$ Meilen in der Zeiteinheit, so legt das Dampfschiff in einer Zeiteinheit stromabwärts, da beide Kräfte in derselben Richtung wirken $(x + y)$ und stromaufwärts, da beide Kräfte in entgegengesetzter Richtung wirken, $(x - y)$ Meilen zurück. Demnach braucht das Dampfschiff um eine Meile in der einen oder andern Richtung zurückzulegen $\frac{1}{x+y}$ oder $\frac{1}{x-y}$ Zeiteinheiten und um a oder a' und b oder b' Meilen in derselben Richtung zurück zu legen $\frac{a}{x+y}$ oder $\frac{a'}{x+y}$ und $\frac{b}{x-y}$ oder $\frac{b'}{x-y}$ Zeiteinheiten. Da nun bei der ersten Fahrt die Summe der gebrauchten Zeiteinheiten $= t$ und bei der zweiten Fahrt $= t'$ ist, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\text{I. } \frac{a}{x+y} + \frac{b}{x-y} = t$$
$$\text{II. } \frac{a'}{x+y} + \frac{b'}{x-y} = t'.$$

Aus diesen Gleichungen bestimme man unmittelbar $(x + y)$ und $(x - y)$ um aus den für sie gefundenen Werthen x und y mit Hülfe der einfachen allgemeinen Aufgabe aus Summe und Differenz zweier Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

7. Aufgabe. Heis, 86. Vier Metalle sind in dem Verhältnisse $1 : 3 : 5 : 7$ mit einander verbunden. Setzt man zu dem Gemische der Quantität noch das $2^3/_8$fache einer andern, aus denselben Metallen bestehenden Legirung hinzu, so ändert sich das genannte Verhältniß der Metalle in $3 : 4 : 5 : 6$ um. In welchem Verhältnisse stehen die Metalle der hinzugesetzten Legirung?

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Stehen die Metalle der hinzugesetzten Legirung in dem Verhältnisse $x:y:z:u$, so erhält man, da sie sich vor der Legirung wie $1:3:5:7$ verhalten, nach der Legirung die fortlaufende Proportion $x+1:y+3:z+5:u+7=3:4:5:7$. Vor der Legirung bestand die Quantität aus 16 Theilen. Da sie nun durch die Legirung aus $2^3/_8 \cdot 16$ Theilen bestehen, so ist die Gleichung I. $x+y+z+u=2^3/_8 \cdot 16=38$. Aus der fortlaufenden Proportion erhält man die drei andern Gleichungen

$$\text{II. } (x+1)4=(y+3)3$$
$$\text{III. } (x+1)5=(z+5)3$$
$$\text{IV. } (x+1)7=(y+7)3.$$

8. Aufgabe. Heis, 88. Zwei Körper bewegen sich gleichförmig von zwei Punkten, von A und B einander entgegen. 15 Secunden nach ihrem Abgange haben sie die Entfernung 35 Fuß; und 17 Secunden nach ihrem Abgange abermals die Entfernung von 35 Fuß. Hätten beide Körper sich hintereinander, statt gegeneinander, bewegt, so würde 21 Secunden nach ihrem Abgange der vorangehende, mit kleinerer Geschwindigkeit sich bewegende, Körper um 35 Fuß von dem nachfolgenden entfernt sein. Wie groß ist die Entfernung der Punkte A und B, und wie viel Fuß legt jeder der Körper in einer Secunde zurück?

Ist die Geschwindigkeit von $A=x$, die kleinere Geschwindigkeit von $B=y$ Fuß und die Entfernung von A nach $B=z$ Fuß, so ist die erste Gleichung, da sie nach 15 Secunden noch 35 Fuß von einander entfernt sind I. $15x+15y=z-35$. Da sie nach 17 Secunden wieder dieselbe Entfernung von 35 Fuß haben, so müssen sie die ganze Entfernung von A nach B und außerdem noch diese 35 Fuß zurückgelegt haben. Daher ist die zweite Gleichung II. $17x+17y=35+z$. Da 21 Secunden nach ihrem Abgange, wenn sie sich hintereinander bewegen, B von dem nachfolgenden Körper A um 35 Fuß entfernt ist, sich ihm also um $z-35$ Fuß genähert hat und $(21x-21y)$ gleichfalls ein Ausdruck für die Strecke ist, um die sich A dem B genähert hat, so ist die dritte Gleichung

$$\text{III. } 21x-21y=z-35.$$

9. Aufgabe. Heis, 92. Ein Rechenmeister gab seinen 3 Schülern zwei Zahlen zum Multipliciren auf. Nach verrichteter Multiplication vergaß der eine bei der Summirung auf irgend einer Stelle eine Einheit im Sinne zu behalten; er machte die Probe auf die Rechnung, indem er das Resultat durch die kleinere Zahl dividirte und erhielt zum Quotienten 971, zum Rest 214; der Zweite vergaß bei der Summirung eine 2 an der nächst folgenden Stelle zuzuzählen; er machte ebenfalls die Probe durch die Division und erhielt zum Quotienten 965, zum Reste 198; der Dritte endlich fehlte um eine 1 an der nächst folgenden Stelle linker Hand und erhielt, indem er auch die Probe machte, zum Quotienten 940, zum Reste 48. Welches waren die beiden Zahlen und bei welcher Stelle wurde von den drei Rechnern gefehlt?

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Bezeichnet man die größere gegebene Zahl mit x, die kleinere mit y und den Fehler des ersten Rechners mit z, so ist das Product der Zahlen xy. Da nun der erste Rechner einen Fehler von z Einheiten macht und bei der Division seines fehlerhaften Productes $(xy - z)$ mit y zum Quotienten 971 und zum Reste 214 erhält, so ist die erste Gleichung

I. $xy - z = 971y + 214$. Auf ähnliche Weise erhält

man II. $xy - 20z = 965y + 198$

und III. $xy - 100z = 940 + 48$.

10. Aufgabe. Heis, 94. Drei Bauern A, B, C haben ihr Vieh abwechselnd auf 4 Weiden geschickt und auf jeder derselben gleichviel für die Woche und für jedes Stücke bezahlt. A schickt seine Heerde 5 Wochen auf die erste, 6 Wochen auf die zweite, 8 Wochen auf die dritte und 9 Wochen auf die vierte; B schickte seine Heerde 8 Wochen auf die erste, 12 auf die zweite, 3 auf die dritte und 5 Wochen auf die vierte Weide; C endlich schickte seine Heerde 8 Wochen auf die erste, 3 auf die zweite, 10 auf die dritte und 7 Wochen auf die vierte Weide. Auf der ersten Weide zahlen sie gemeinschaftlich 130 Thlr. 12 Gr., auf der zweiten 116 Thlr. 12 Gr., auf der dritten 138 Thlr. 8 Gr. Wie viel Stück Vieh hat jeder der drei Bauern wenn sie zusammen 138 Stück besitzen, wie viel mußten sie zusammen für die vierte Weide bezahlen?

Bezeichnet man das, was jeder Bauer für seine Heerde in einer Woche bezahlt, mit x, y, z und das, was für die vierte Weide bezahlt wird, mit u, alles in Groschen ausgedrückt, und berücksichtigt man, daß jeder Bauer für n Stück während m Wochen ebenso viel Weidegeld als für mn Stück in einer Woche bezahlt, so erhält man leicht folgende vier Gleichungen für das Weidegeld auf den vier Weiden

$$\begin{aligned} \text{I. } 5x + 8y + 8z &= 3912 \\ \text{II. } 6x + 12y + 3z &= 3492 \\ \text{III. } 8x + 3y + 10z &= 4148 \\ \text{IV. } 9x + 5y + 7z &= u \end{aligned}$$

und aus ihnen $x\,(168)$, $y\,(148)$, $z\,(236)$ und $u\,(3904)$. Addirt man hierauf die vier Gleichungen, nachdem man für u seinen Werth (3904) substituirt hat, so erhält man die Gleichung

$$28\,(x + y + z) = 15456.$$

Daher bezahlen A, B und C auf allen vier Weiden für 28 Wochen 15456 Gr. Da sie dies für 138 Stück bezahlen, so bezahlen sie für 1 Stück in jeder Woche $\frac{15456}{138 \,.\, 28} = 4$ Groschen.

Daher hat $A \frac{168}{4} = 42$; $B \frac{148}{4} = 37$; $C \frac{236}{4} = 59$ Stück.

11. Aufgabe. Heis, 96. In jedem von 7 Körben befindet sich eine gewisse Zahl Aepfel. Lege ich aus dem ersten in jeden der übrigen so viel, als sie enthalten, hierauf aus dem in jeden der übrigen so viel, als sie ent-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

halten u. s. w. bis zum letzten zu, so erhält jeder gleichviel, nämlich 128 Aepfel. Wie viel Aepfel enthält jeder Korb vor der Vertheilung?

Werden die gesuchten Zahlen mit x, y, z u. s. w. bezeichnet und wird $x + y + z + t + u + v + w = 7 \,.\, 128 = s$ gesetzt, so erhält man leicht folgende tabellarische Uebersicht über die Anzahl der Aepfel in jedem Korbe nach jeder Umlegung.

		Stellenzahl der Körbe.						
		1	2	3	4	5	6	7
		Anfängliche Anzahl.						
		x	y	z	t	u	v	w
Anzahl der Aepfel nach den einzelnen Umlegungen.	1	$2x - s$	$2y$	$2z$	$2t$	$2u$	$2v$	$2w$
	2	$4x - 2s$	$4y - s$	$4z$	$4t$	$4u$	$4v$	$4w$
	3	$8x - 4s$	$8y - 2s$				$8v$	$8w$
	4	$16x - 8s$	$16y - 4s$				$16v$	$16w$
	5	$32x - 16s$	$32y - 8s$				$32v$	$32w$
	6	$64x - 32s$	$64y - 16s$				$64v - s$	$64w$
	7	$128x - 64s$	$128y - 32s$				$128v - 2s$	$128w - s$

Da nun nach der siebenten Umlegung in jedem der sieben Körbe $= 128$ Aepfel sind, so erhält man folgende 7 Gleichungen:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & 128x - 64s = 128 \\
\text{II.} & 128y - 32s = 128 \\
\text{III.} & 128z - 16s = 128 \\
\text{IV.} & 128t - 8s = 128 \\
\text{V.} & 128u - 4s = 128 \\
\text{VI.} & 128v - 2s = 128 \\
\text{VII.} & 128w - s = 128.
\end{array}$$

Da alle Gleichungen den Factor 128 enthalten, so kann man sie durch ihn dividiren, wodurch die rechte Seite in allen $= 1$ wird. Dann erhält man aus I. $x - 7 \,.\, 64 = 1$; aus II. $y - 7 \,.\, 32 = 1$ u. s. w.

12. Aufgabe. Heis, 98. Zerlege den Quotienten $\frac{27 + 34z}{(3 + 4z)(6 + 7z)}$ in die Summe zweier Quotienten, deren Divisoren $3 + 4z$ und $6 + 7z$ sind.

Werden die gesuchten Dividenden mit x und y bezeichnet, so soll $\frac{x}{3 + 4z} + \frac{y}{6 + 7z} = \frac{27 + 34z}{(3 + 4z)(6 + 7z)}$ sein. Werden die Brüche fort-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

geschafft, so erhält man $(6 + 7z)x + (3 + 4z)y = 27 + 34z$. Wird die Gleichung entwickelt, nach z geordnet und auf 0 reducirt, so gibt dies die Gleichung $(7x + 4y - 34)z + (6x + 3y - 27) = 0$. Diese Gleichung kann aber nur zu Null werden, wenn beide Glieder zu Null werden oder wenn I. $7x + 4y = 34$.
II. $6x + 3y = 27$ ist.

B. Gleichungen vom zweiten Grade.

§. 68.

Gleichungen vom zweiten Grade mit einer Unbekannten.

1. Jede Gleichung, die entwickelt nnd geordnet die Unbekannte mit keinem höhern Exponenten als 2 enthält, ist eine quadratische (§. 60. 19.) und ihre allgemeine Form ist, nachdem man das erste Glied von seinem Coefficienten befreit hat, $x^2 + ax + b = 0$ oder $x^2 + ax = b$.

2. Die Coefficienten und das bekannte Glied können ganz beliebige Zahlen- oder Buchstabenausdrücke sein, doch setzt man bei gegebenen Größen, wie sich von selbst versteht, gewöhnlich stillschweigend reelle Zahlenwerthe voraus. Sind die gegebenen Größen negativ, so verwandeln sich die + in — Zeichen. Wie viel Formen quadratischer Gleichungen hätte man aufzuführen, wenn der Zeichenwechsel berücksichtigt werden sollte?

3. Jede quadratische Gleichung hat drei Glieder, von denen weder das erste noch das dritte oder bekannte Glied fehlen darf, wenn sie den Charakter einer quadratischen Gleichung behalten soll. Läßt sich $x^2 + ax = 0$ auch als quadratische Gleichung betrachten? Welche beiden Wurzeln hat sie?

4. Je nachdem das zweite Glied (ax) in einer quadratischen Gleichung fehlt oder nicht, werden zwei Formen quadratischer Gleichungen unterschieden, die reine oder reducirte und die gemischte oder vollständige quadratische Gleichung. Von beiden Formen soll nun speciell die Rede sein.

Reine quadratische Gleichungen.

5. Jede reine quadratische Gleichung hat die Form
$$x^2 \pm a = 0 \text{ oder } x^2 = \pm a.$$

7. Jede reine quadratische Gleichung hat zwei gleiche entgegengesetzte reelle oder imaginaire Wurzeln, je nachdem in $x^2 = \pm a$ vor a das + oder — Zeichen steht (§. 48). Beide Wurzeln werden, nachdem die Gleichung entwickelt und geordnet ist, durch einfache Wurzelausziehung gefunden. Wie würde man verfahren müssen, wenn man die Wurzeln der reinen quadratischen Gleichung aus der Form $x^2 \mp a = 0$ unmittelbar herleiten wollte?

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Welcher einfache Satz über Factorenzerlegung würde dabei in Anwendung kommen?

Beispiele für die Auflösung reiner quadratischer Gleichungen.

Beispiel 1. $10000 - \frac{36}{49}x^2 = 199$; $9801 = \frac{36}{49}x^2$; $\pm 99 = \frac{36}{7}x$; $x = \pm 115^1/_2$.

Beispiel 2.

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{2(a^2+1)}{(1+a)(1-a)};\ 2(x^2+a^2) = \frac{2(a^2+1)(x^2-a^2)}{1-a^2}$$

$$(x^2+a^2)(1-a^2) = (a^2+1)(x^2-a^2);\ x^2 + a^2 - a^2x^2 - a^4$$
$$= a^2x^2 + x^2 - a^4 - a^2;\ 2a^2 = 2a^2x^2;\ x = \pm 1.$$

Beispiel 3. $\sqrt{\frac{3m^2}{x^2} + m^2 - 3} = m + 1 - \sqrt{\frac{3m^2}{x^2} - 2}$.

Setzt man $\frac{3m^2}{x^2} = y$, so erhält man $\sqrt{y + m^2 - 3} = m + 1 - \sqrt{y-2}$ und aus ihr durch Rationalmachung

$$y + m^2 - 3 = (m+1)^2 - 2(m+1)\sqrt{y-2} + y - 2$$
$$m^2 - 1 = (m+1)^2 - 2(m+1)\sqrt{y-2}.$$

Dividirt man mit $(m+1)$ und zieht die Glieder zusammen, so kommt $1 = \sqrt{y-2}$; $y = 3$. Wird dieser Werth für y in die Gleichung $\frac{3m^2}{x^2} = y$ substituirt, so erhält man aus ihr $x = \pm m$.

Beispiel 4. $\frac{a(a-b)}{x-a-b} + a + b - x = \frac{(b-a)b}{a+b-x}$. Setzt man $a + b - x = y$, so gibt dies die Gleichung $\frac{a(a-b)}{-y} + y = \frac{(b-a)b}{y}$. Durch Fortschaffung der Divisoren erhält man $a(a-b) - y^2 = (a-b)b$ und aus ihr $y = \pm(a-b)$. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung $a + b - x = y$ und löset dieselbe für beide Werthe auf, so erhält man $x = 2a$; $x' = 2b$.

Beispiel 5. $m = \sqrt{\frac{(x+b-c)(x-b+c)}{(b+c+x)(b+c-x)}}$. Bei der Auflösung dieser Gleichung leistet der Satz: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ die besten Dienste.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Gemischte quadratische Gleichungen.

7. Jede gemischte oder vollständige quadratische Gleichung von der Form $x^2 \pm ax = \pm b$ wird aufgelöst, indem man auf beiden Seiten das Quadrat des halben Coefficienten $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ von x addirt, wodurch die linke Seite zu einem vollständigen Quadrate wird und die Gleichung in folgende übergeht: $x^2 \pm ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \pm b$. Zieht man hierauf aus beiden Seiten, mit Berücksichtigung der doppelten Vorzeichen auf der rechten Seite, die Wurzel und transponirt $\pm \frac{a}{2}$; so erhält man für die Wurzel den Ausdruck:

$$x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \pm b} = \mp \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 \pm 4b}$$

$$= \frac{\mp a \pm \sqrt{a^2 \pm 4b}}{2} = \frac{1}{2}(\mp a \pm \sqrt{a^2 \pm 4b}.$$

Jede gemischte quadratische Gleichung hat demnach zwei Wurzeln, und jede derselben besteht im Allgemeinen aus zwei Bestandtheilen

a. aus dem halben Coefficienten von x mit entgegengesetztem Vorzeichen $(\mp a)$,

b. aus der Wurzel aus dem Quadrate des halben Coefficienten und dem bekannten Gliede mit demselben Vorzeichen $\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} \pm b}\right)$.

Fragen: Wie kommt man auf diese Lösung? Wie wird man bei der Lösung zu verfahren haben, wenn die Gleichung auf Null reducirt wird?

Beispiele für die Lösung gemischter quadratischer Gleichungen.

Beispiel 1. $x^2 + 2bx + 120 = 0$; $x^2 + 26x = -120$; $x = -13 \pm \sqrt{169 - 120}$; $x = -13 \pm 7$; $x = -6$; $x' = -20$.

Beispiel 2. $x^2 - (a+b)x + ab = 0$; $x^2 - (a+b)x = -ab$;

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab};\ x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4}};$$

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}};\ x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2};\ x = a;\ x' = b.$$

Beispiel 3. $(x - 3^1/_2)(x + 5^1/_2) = 0$. Durch Anwendung des Satzes, daß ein Product zu Null wird, wenn einer seiner Factoren zu Null wird. Demnach ist $x - 3^1/_2 = 0$ und $x + 5^1/_2 = 0$ und daher $x = 3^1/_2$ und $x' = -5^1/_2$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Beispiel 4. $\frac{x^3-1}{x-1}=0;\ x^2+\alpha+1=0;\ x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1};$
$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$

Beispiel 5. $(x^2-8x+11)^2+(x-4)^2=25.$ Wird das zweite Glied der linken Seite entwickelt, so erhält man

$$(x^2-8x+11)^2+x^2-8x+16=25.$$

Hierauf führe man für x^2-8x die Hülfsgröße z ein, so geht die Gleichung in folgende über $(z+11)^2+z=9$. Aus ihr erhält man $z=-\frac{23}{2}\pm\frac{9}{2};\ z=-7;\ z'=-16.$ Substituirt man diese Werthe in die Gleichung für x^2-8x, so gibt dies die beiden Gleichungen $x^2-8x=-7$ und $x^2-8x=-16$. Daher $x=4+3=7;\ x'=4-3=1;\ x''=4;\ x'''=4.$

8. Alle dreigliedrigen Gleichungen höherer Grade, in denen die Unbekannte in einem Gliede mit einem doppelt so großen Exponenten als in dem andern Gliede erscheint, oder welche die Form $x^{2n}+ax^n=b$ haben, lassen sich wie gemischte quadratische Gleichungen auflösen, wenn man sie für x^n auflöst und nachher mit n radicirt. Denn für x^n ist die Gleichung eine gemischte quadratische und daher ihre Wurzel

$$x^n=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} \text{ und } x=\sqrt[n]{-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}}.$$

Beispiele für die Auflösung höherer dreigliedriger Gleichungen.

Beispiel 1. $x^6+27=28x^3;\ x^6-28x^3=-27;$
$x^3=14\pm\sqrt{196-27};\ x=\sqrt[3]{14\pm13};\ x=3;\ x'=1.$

Beispiel 2. $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=20;\ \sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=20;\ \sqrt[4]{x}=-\frac{1}{2}$
$\pm\sqrt{\frac{1}{4}+20}\ \ \sqrt[4]{x}=-\frac{1}{2}\pm\frac{9}{2};\ \ \sqrt[4]{x}=4\ \ \sqrt[4]{x}=-5;$
$x=256;\ x'=625.$

9. Wurzelfactor heißt bei den quadratischen sowie bei allen höheren Gleichungen die Differenz zwischen der Unbekannten und der Wurzel. Sind α oder $-\beta$ Wurzeln einer Gleichung, so heißen $x-\alpha$ und $x-(-\beta)$ oder $x+\beta$ ihre Wurzelfactoren.

10. Jede quadratische Gleichung läßt sich durch ihren Wurzelfactor ohne Rest dividiren. Ist α eine Wurzel der Gleichung

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$x^2 - ax + b = 0$, so ist auch

$\alpha^2 - a\alpha + b = 0$. Subtrahirt man die untere Gleichung von der oberen so erhält man $(x^2 - \alpha^2) - (x - \alpha)\, a = 0$. Da nun jedes Glied sich durch $(x - \alpha)$ ohne Rest dividiren läßt, so auch die ganze Gleichung und daher auch die ursprüngliche Gleichung.

11. Aus dem vorigen Satze ergeben sich folgende wichtige Folgerungen;

a. Jede quadratische Gleichung ist ein Product ihrer Wurzelfactoren.

b. Jede quadratische Gleichung hat nicht mehr als zwei Wurzeln. Denn hätte sie z. B. die drei Wurzeln α, $-\beta$, $+\gamma$, so hätte sie auch drei Wurzelfactoren $(x - \alpha)(x + \beta)(x - \gamma)$ und wäre nicht mehr vom zweiten sondern vom dritten Grade.

c. Man erhält eine quadratische Gleichung mit vorgeschriebenen Wurzeln, wenn man aus den Wurzeln die Wurzelfactoren bildet und dieselben mit einander multiplicirt.

d. Der Coefficient des zweiten Gliedes einer annullirten gemischten quadratischen Gleichung ist der Summe der Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen und das bekannte Glied dem Producte derselben mit demselben Vorzeichen gleich.

Beweis: Sind α und $-\beta$ Wurzeln einer Gleichung und ist $\alpha > \beta$, so sind die Wurzelfactoren $(x - \alpha)(x + \beta)$ und die Gleichung $x^2 - (\alpha - \beta)\, x - \alpha\beta = 0$. In jedem andern Falle kann der Beweis ebenso geführt werden.

e. Sind die bekannten Glieder in zwei quadratischen Gleichungen gleich, die Coefficienten der zweiten Glieder zwar gleich aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen, so haben beide Gleichungen dieselben Wurzeln aber mit entgegengesetzten Vorzeichen.

12. Aus der Auflösungsformel und aus dem Satze über die Coefficienten läßt sich auch schon vor der Lösung über die Beschaffenheit der Wurzeln, ihre Gleichheit oder Ungleichheit, ihre Rationalität oder Irrationalität u. s. w. urtheilen.

13. Aus der Auflösungsformel der gemischten quadratischen Gleichung $x^2 \pm ax \pm b$ oder aus $x = \pm \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 \pm 4b}$ folgt

a. daß beide Wurzeln rational oder irrational sind, je nachdem $\sqrt{a^2 \pm 4b}$ ein vollständiges Quadrat ist oder nicht,

b. daß beide Wurzeln $= \pm \frac{a}{2}$ sind, sobald $a^2 - 4b = 0$ ist,

c. daß beide Wurzeln aber beide zugleich dann imaginair sind, wenn in $\sqrt{a^2 - 4b}$ $a^2 < 4b$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

14. Aus den Vorzeichen in einer gemischten quadratischen Gleichung läßt sich mit *Bestimmtheit auf die Vorzeichen ihrer Wurzeln schließen.*

a. Hat die quadratische Gleichung die Form $x^2 + mx + n = 0$ und bezeichnen wir die größere Wurzel mit α, die kleinere mit β, so sind ihre beiden Wurzeln negativ, denn ihre Wurzelfactoren müssen $(x+\alpha)$ und $(x + \beta)$ sein.

b. Hat die Gleichung die Form $x^2 - mx + n = 0$, so sind ihre beiden Wurzeln positiv, denn ihre Wurzelfactoren müssen $(x - \alpha)$ und $(x - \beta)$ sein.

c. Hat die Gleichung die Form $x^2 + mx - n = 0$, so ist die größere Wurzel α negativ und die kleinere β positiv, denn ihre Wurzelfactoren müssen $(x + \alpha)$ und $(x - \beta)$ sein.

d. Hat endlich die Geichung die Form $x^2 - mx - n = 0$, so ist die größere Wurzel positiv und die kleinere negativ; denn ihre Wurzelfactoren müssen $(x - \alpha)$ und $(x + \beta)$ sein.

15. Für diejenigen Gleichungen, die große Coefficienten und bekannte Glieder haben oder in denen selbst x^2 mit einem unbequemen Coefficienten versehen ist, lehrt die Trigonometrie durch Einführung eines Hülfswinkels eine einfache logarithmische Formel, mit der selbst die verwickeltesten Gleichungen leicht gelöst werden können. Die Lösung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten läßt demnach Nichts zu wünschen übrig, was von um so größerer *praktischer Wichtigkeit* ist, da solche Gleichungen namentlich bei geometrischen Aufgaben sehr häufig vorkommen.

16. Fragen. Welche Vorzeichen haben die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 24 + 16 = 0$? Sind die Wurzeln derselben rational oder irrational, imaginair oder reell? Welche Gleichung erhält man aus den Wurzeln 4 und -5? Welche Gleichung hat die Wurzelfactoren $x - 4a + b$ und $x + 3a - 2b$? Wenn die Gleichung $x^2 - 10x + 24 = 0$ ganze Zahlen zu Wurzeln hat, in welchem Gliede müssen sie als Factoren enthalten sein, welches Glied muß ihre Summe enthalten, und mit welchem Vorzeichen? Welche Gleichung hat die beiden Wurzeln $+ 7$? Welche Gleichung hat die Wurzeln $3 + \sqrt{-1}$ und $3 - \sqrt{-1}$?

§. 69.

Erklärung einiger Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten führen und Bildung der zu ihrer Lösung nöthigen Gleichungen.

1. Aufgabe. Heis, §. 71. 7. Drei Zahlen zu finden, die in dem Verhältniß $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ stehen und deren Quadratsumme 10309 ausmacht. —

*) Wie lassen sich aus dem Wechsel oder der Folge der Vorzeichen die Vorzeichen der Wurzeln bestimmen?

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Werden die Brüche fortgeschafft, so verhalten sich die Zahlen wie 6 : 4 : 3. Wird die Größe eines Bestandtheiles oder die Einheit der zu suchenden Zahlen mit x bezeichnet, so ist die erste Zahl $6x$, die zweite $4x$ und die dritte $3x$ und die Gleichung $(6x)^2 + (4x)^2 + (3x)^2 = 10309$.

2. Aufgabe. Heis, 18. Zwei Bäuerinnen bringen zusammen 260 Eier zu Markte und lösen gleichviel. „Hätte ich deine Eier gehabt," sagte die eine zur andern, „und hätte sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich daraus gerade einen Thaler gelöst." „Das mag wohl sein," erwiederte die andere; „hätte ich aber deine Eier gehabt und sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich gar 1 Thlr. 10 Gr. 10 Pfg. gelöst. Wie viel Eier brachte jede zu Markte?

Hat die erste Bäuerin x, so hat die andere $260 - x$ Eier. Wird der Verkaufspreis in Pfennige verwandelt, so hätte die erste Bäuerin nach ihrer Aussage für $260 - x$ Eier 360 Pfennige bekommen oder für 1 Ei $\frac{360}{260 - x}$; ebenso hätte die zweite Bäuerin dann $\frac{490}{x}$ Pfennige für ein Ei bekommen. Da die erste nun wirklich x und die zweite $260 - x$ Eier verkauft, und beide gleichviel aufgenommen haben, so ist die Gleichung:

$$\frac{360}{260 - x}x = \frac{490}{x}(260 - x).$$

3. Aufgabe. Heis, 40. In ein Rechteck, dessen Länge a und dessen Breite b Fuß beträgt, soll ein anderes eingezeichnet werden, dessen Seiten von denen des ersten gleich weit abstehen, dessen Inhalt dem $n$ten Theile des Inhalts des übrig bleibenden Theils gleich ist? Um wie viel stehen die Seiten des zweiten Rechtecks von denen des ersten ab?

Wird der Abstand der Rechtecke mit x bezeichnet, so ist die Länge und Breite des eingeschriebenen Rechtecks $a - 2x$ und $b - 2x$ und sein Inhalt $(a - 2x)(b - 2x)$. Da der Inhalt nun der $n$te Theil des Restes oder der $(n + 1)$te Theil des ganzen Rechtecks oder $\frac{ab}{n+1}$ sein soll, so erhält man die Gleichung $(a - 2x)(b - 2x) = \frac{ab}{n+1}$.

4. Aufgabe. Heis, 48. A und B gaben zu einem Geschäfte zusammen 3400 Thaler her und zwar A auf 12, B auf 16 Monate. Bei der Theilung erhält A 2070 Thaler Kapital sammt Gewinn, und ebenso B 1920 Thaler. Wie groß war eines Jeden Einlage?

A hat x Thaler und B $3400 - x$ Thaler eingelegt. Demnach hat A von $12x$ Thalern und B von $(3400 - x)\,16$ Thalern Gewinn zu erhalten. A erhält $2070 - x$ und B $1920 - (3400 - x) = x - 1480$ Gewinn.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

A gewinnt an einem Thaler $\frac{2070-x}{12x}$ und B $\frac{x-1480}{16(3400-x)}$. Da nun der Gewinn an einem Thaler für beide gleich ist, so erhält man die Gleichung

$$\frac{2070-x}{12x} = \frac{x-1480}{16(3400-x)}.$$

5. Aufgabe. Heis, 78. Aus einem mit 360 Quart Weingeist gefüllten Fasse nehme ich eine bestimmte Menge heraus und ersetze das Fehlende durch Wasser. Von der gehörig vermischten Flüssigkeit nehme ich zum zweiten Male ebensoviel Quart heraus, als zum ersten Male und noch 84 Quart dazu und fülle das Faß wieder mit Wasser. Nach der zweiten Mischung enthält die Flüssigkeit ebensoviel Wasser als Weingeist. Wie viel Maß wurden zum ersten Male herausgenommen oder zugesetzt?

Bezeichnet man die zugesetzten Quart Wasser mit x, so sind nach der ersten Füllung in dem Fasse x Quart Wasser. Da nun von dem vollen Fasse wieder $x+84$ Quart genommen werden, so werden von den x darin befindlichen Quart Wasser nach Verhältniß genommen $360 : x + 84 = x : \frac{(x+84)x}{360}$. Da nun wieder $x+84$ Quart Wasser zugesetzt werden, so sind in dem Fasse $x+(84+x)$ $-\frac{(x+84)x}{360}$ Quart Wasser. Da nun Wasser und Weingeist gleich sein sollen, so erhält man für die Wassermenge die Gleichung

$$x+(84+x)-\frac{(84+x)x}{360} = 180.$$

6. Aufgabe. Heis, 81. Ein Kapitalist verleiht sein Kapital von k Thalern zu einem gewissen Procente auf Zinsen. Am Ende des ersten Jahres nimmt er für seinen Unterhalt b Thaler heraus und vermehrt mit dem Ueberschusse der Zinsen sein Kapital. Zu demselben Zinsfuße verleiht er im zweiten Jahre sein Kapital und sieht sich nach Abzug von abermals b Thalern im Besitze von k' Thalern. Zu wie viel Procent hatte er sein Kapital ausstehen?

Bezeichnet man die Procente mit x, so ist der Werth eines verzinseten Thalers $\frac{100+x}{100}$, daher der Werth von k Thalern $= \frac{100+x}{100}k$ Thaler. Da nun b Thaler am Ende des Jahres davon genommen werden, so ist das verzinsliche Kapital im zweiten Jahre $\frac{100+x}{100}k - b$ Thaler. Da das Kapital sich im zweiten Jahre nach demselben Zinsfuße verzinset und am Ende wieder b Thaler davon genommen werden, so ist dasselbe $\left(\frac{100+x}{100}k-b\right)\frac{100+x}{100} - b$ und daher die Gleichung $\left(\frac{100+x}{100}k-b\right)\frac{100+x}{100} - b = k'$. Bei der Auflösung führe man für $\frac{100+x}{100}$ die Hülfsgröße y ein.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

7. Aufgabe. Heis, 91. Wie groß ist die unendliche Reihe

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\ldots}}}}$$

Setzt man die Summe der unendlichen Reihe vorläufig $= x$ und quadrirt, so erhält man $a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a\ldots}}} = x^2$. Da nun durch Subtraction eines endlichen Gliedes die unendliche Reihe nicht vermindert wird, so die Gleichung $x = x^2 - a$.

8. Aufgabe. In den Punkten A und B der geraden Linie $AB = d$ befinden sich zwei leuchtende Körper, deren Lichtstärke auf die Längeneinheit durch a und b (Wachskerzen) ausgedrückt ist. In welchem Punkte der Linie ist ihre Lichtstärke gleich?

Bezeichnet man die Entfernung des gesuchten Punktes von A mit x, so ist seine Entfernung von $B = d - x$. Da die Lichtstärke im Quadrat der Entfernung abnimmt, so ist sie in einer Entfernung von x Einheiten $\frac{a}{x^2}$ und in einer Entfernung von $(d-x)$ Einheiten $= \frac{b}{(d-x)^2}$. Daher die Gleichung $\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}$. Wird die Gleichung aufgelöst, so erhält man zwei Werthe für x und zwei Werthe für $a - x$. Nämlich

$$x = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};\quad a - x = \frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$x' = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};\quad a - x = \frac{-d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Bei der Discussion dieser Aufgabe suche der Anfänger sich besonders folgende Fragen zu beantworten: Welche Werthe enthalten x und $a - x$, wenn α. $a = b$; β. $a > b$; γ. $a < b$; δ. wenn $a = b$ und zugleich $d = 0$ ist. Gibt es in der Linie AB oder deren Verlängerungen nur einen oder mehrere Punkte gleicher Lichtstärke und wo finden sie sich unter den obigen Voraussetzungen?

Aufgabe 9. Eine unbekannte Zahl (Vermögen) soll in eine unbekannte Anzahl gleicher Theile getheilt werden, so daß jeder Theil aus zwei Stücken besteht. Die ersten Stücke sollen a, $2a$, $3a$, ... $(y-1)a$, ya; jedes zweite Stück aber soll der $n$te Theil des noch vorhandenen Restes sein. Wie groß ist die Zahl, in wie viel Theile ist sie getheilt und wie groß ist ein Theil?

Nach den Bedingungen der Aufgabe muß der letzte Theil ay sein, wenn die Anzahl der Theile $= y$ gesetzt wird, da bei dem letzten Theile kein Rest bleiben darf. Die Summe aller Theile oder die gesuchte Zahl ist $= ay \,.\, y = ay^2$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Der erste Theil wird $a + \frac{ay^2 - a}{n} = a + \frac{a(y^2 - 1)}{n}$ sein. Da nun alle Theile gleich sein sollen, so erhält man die Gleichung:

$$a + \frac{(y^2 - 1)\,a}{n} = ay \text{ oder } 1 + \frac{y^2 - 1}{n} = y.$$

Aus dieser Gleichung und ihrer Auflösung

$$y = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - (n-1)} = \frac{n \pm (n-2)}{2} = n - 1 \text{ oder } 1$$

folgt, daß man a und n beliebig bestimmen darf, um eine Menge verschiedener Aufgaben zu finden.

Aufgabe 10. Aus der Zeit (t), welche von dem Augenblicke, wo man einen Stein in einen Brunnen fallen läßt, bis zu demjenigen verstreicht, wo man den Aufschlag desselben auf den Wasserspiegel hört, die Tiefe des Brunnens bis auf den Wasserspiegel zu bestimmen.

Der bekannte Zeitraum t zerfällt in zwei Zeiträume t' und t'', und zwar α. in den Zeitraum (t') den der Körper beim Fallen gebraucht und β. in denjenigen, welchen der Schall von der Wasserfläche bis zum Ohre gebraucht. Der Schall pflanzt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit (c) 1058′ fort. Bezeichnet man nun die Tiefe des Brunnens mit x, so läßt sich sowohl t' als t'', deren Summe gegeben ist, durch c, x und g (Fallraum in der ersten Secunde $= 15^5/_8$′) ausdrücken und man erhält $x = gt'^2$ und $x = ct''$. Aus ihnen findet sich $t' = \sqrt{\frac{x}{g}}$ und $t'' = \frac{x}{c}$. Daher $t' + t'' = t = \sqrt{\frac{x}{g}} + \frac{x}{c}$. Aus ihr endlich erhält man

$$x = c \,.\, \frac{2gt + c \pm \sqrt{c^2 + 4cgt}}{2g}.$$

Uebergang. Bisher haben wir nur die Hauptaufgabe der Algebra, die Auflösung der Gleichungen, im Auge gehabt, d. h. wir haben denjenigen Werth der Hauptgröße oder Unbekannten zu bestimmen gesucht, der das Gesammtresultat der Gleichung oder den ganzen Ausdruck $x^2 + ax + b = 0$ macht. Es gibt aber auch eine Menge von Aufgaben, in denen nicht derjenige Werth der Hauptgröße gesucht wird, der die Gleichung zu Null macht, sondern der ihr einen positiven oder negativen reellen Werth verleiht. Und unter diesen reellen Werthen sind namentlich die größten und kleinsten Werthe oder die sogenannten Maxima und Minima von vorzüglicher Wichtigkeit für eine Menge praktischer Fragen. Mit der Aufsuchung dieser Maximal- und Minimalwerthe und der zu ihnen gehörenden Werthe der Hauptgrößen, sofern sie sich aus quadratischen Gleichungen ergeben, wird sich der nächste §. beschäftigen. Zu diesem Zweck müssen wir die Frage etwas allgemeiner fassen und die quadratischen Gleichungen noch einer neuen Erörterung unterziehen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 70.

Anwendung der gemischten quadratischen Gleichungen zur Lösung von Aufgaben über Maxima und Minima.

1. In der Mathematik nennt man jeden Größenausdruck, der von einer oder mehreren andern veränderlichen und constanten Größen so abhängt, daß sein Werth bestimmt ist, wenn der Werth der andern Veränderlichen bestimmt ist, eine Function der andern Veränderlichen (Variabeln) oder die abhängig Veränderliche, während jene anderen gegebenen veränderlichen Größen die unabhängig Veränderlichen heißen. Die Constanten werden mit den ersten, die Veränderlichen dagegen mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet. Will man die abhängig Veränderliche oder den Werth des gesammten Größenausdrucks mit einem besondern Zeichen ausdrücken, so wird dazu entweder das Zeichen $\varphi(x)$ $f(x)$ (Function von x gelesen) oder ein Buchstabe y oder z gebraucht, welcher durch das Gleichheitszeichen mit dem Größenausdrucke oder der Function verbunden wird. So sind $ax^2 + b$; $ax^2 + bx + c$; $\sqrt{ax^2 - c}$; $(a + b)^x$; $log\, x$ Functionen von x oder $f(x) = ax + b$; $ax^2 + bx + y^2 = y$. Die linken Seiten aller auf Null reducirten algebraischen Gleichungen sind Functionen der Unbekannten oder Hauptgröße. Die Lehre von den Functionen ist der wichtigste, ja eigentlich der einzige Gegenstand der höheren Mathematik und in ihr wird daher der Begriff der Function allseitig entwickelt. In der elementaren Algebra wollen wir uns dieses Begriffes nur als eines Hülfsbegriffes bedienen, um uns kurz und leicht verständlich bei gewissen Aufgaben ausdrücken zu können. —

2. Viele Functionen sind innerhalb bestimmter Grenzen eingeschlossen oder erreichen sogenannte Maxima und Minima d. h. Werthe, die größer oder kleiner sind, als ihre vorangehenden oder nachfolgenden Nachbarwerthe.

3. Hat eine Function, deren Maxima und Minima gesucht werden, die Form einer quadratischen Gleichung $(ax^2 + bx + c)$, so hat man durch Auflösung dieser Gleichung für die Veränderliche x ein Mittel, den Werth des Maximi oder Minimi zu bestimmen. Setzt man nämlich vorläufig den Werth des Maximi oder Minimi gleich y, so ist $ax^2 + by + c = y$ und daher das zu y zugehörige x oder das x, welches das Maximum oder Minimum y zur Folge hat, durch die Gleichung $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c-y}{2}}$ gegeben. Aus dieser Gleichung wird erst y und dann durch Substitution seines Werthes x bestimmt. Wie dies geschieht, soll an einzelnen Aufgaben erörtert werden.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Aufgaben über Maxima und Minima.

1. Eine Zahl (a) so in zwei Summanden zu zerlegen, daß ihr Product ein Maximum wird.

Bezeichnet man den einen Summanden mit x, den andern mit $a-x$, so ist die Gleichung für das Maximum

$$(a-x)x = y \text{ oder } x^2 - ax = -y.$$

Aus ihr erhält man $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - y}$. Soll x reell bleiben, so darf y höchstens $= \frac{a^2}{4}$ sein, wodurch der Ausdruck $\frac{a^2}{4} - y = 0$ und $x = \frac{a}{2}$ wird, d. h. die Zahl a muß in zwei gleiche Summanden zerlegt werden, damit ihr Product $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$ ein Maximum wird.

2. In einen Halbkreis das Rechteck vom größten Flächeninhalt einzuschreiben.

Setzt man den Radius $= r$, die Seite des Rechtecks auf dem Durchmesser $= 2x$ und seine Höhe $= z$, so ist der Flächeninhalt oder das gesuchte Maximum $y = 2xz$ und $z^2 + x^2 = r^2$. Werden nun x oder z eliminirt und die Gleichungen für x^2 und z^2 gelöset, so ergibt sich

$$x^2 = \frac{1}{2} r^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{r^4 - y^2}$$

$$z^2 = \frac{1}{2} r^2 \mp \frac{1}{2} \sqrt{r^4 - y^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß y^2 höchstens $= r^4$ sein kann, wenn x und z reell sein sollen. Der größte Werth oder das Maximum ist daher $y = r^2$ und die ihm entsprechenden Werthe von x und z sind:

$$x = z = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} r \sqrt{2}.$$

3. In ein Dreieck das größte Rechteck zu beschreiben, dessen Basis auf einer Seite des Dreiecks liegt.

Ist die Basis des Dreiecks $= a$, seine Höhe $= h$, die Basis des Rechtecks $= x$ und seine Höhe $= z$, so erhält man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke 1) $h : h - z = a : x$ und

2) $y = xz$.

Eliminirt man z, so ist $x^2 - ax + \frac{ay}{h} = 0$ oder

$$3) \; x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{ay}{h}}.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Soll x reell bleiben, so kann höchstens $\frac{ay}{h} = \frac{1}{4} a^2$ oder $y = \frac{1}{4} ah$ sein. Aus 3 und 2 ergeben sich die zugehörigen Werthe für x und z nämlich $x = \frac{1}{2} a$ und $z = \frac{1}{2} h$.

4. Aus einem geraden Kegel soll ein gerader Cylinder geschnitten werden, dessen Mantel ein Maximum ist.

Ist der Radius des Kegels r, seine Höhe h, der Radius des Cylinders x und seine Höhe z, so ist $r : h = r - x : z$ oder 1) $z = \frac{(r-x)h}{r}$ und der Mantel oder (2) $y = 2\pi xz$. Wird z eliminirt, so erhält man $y = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$ oder $x^2 - rx = -\frac{ry}{2\pi h}$; folglich

$$x = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{ry}{2\pi h}}.$$

Soll x reell bleiben, so kann höchstens $\frac{ry}{2\pi h} = \frac{r^2}{4}$ sein; woraus folgt, daß $y = \frac{1}{2}\pi r h$ ist. Für x und z findet man leicht die Werthe $x = \frac{1}{2} r$ und $z = \frac{1}{2} h$.

5. Aus einem geraden Kegel einen geraden Cylinder zu schneiden, dessen Gesammtfläche ein Maximum wird.

Behält man die Bezeichnung der vorigen Aufgabe bei, so ist $y = 2\pi xz + 2\pi x^2$ und da wiederum $z = \frac{(r-x)h}{r}$, so erhält man nach Elimination von z für y die Gleichung $y = 2\pi x \frac{(r-x)h}{r} + 2\pi x^2$. Aus ihr erhält man für x die Gleichung $x^2 - \frac{rh}{h-r} x = -\frac{ry}{2\pi(h-r)}$ und für x den Ausdruck $x = \frac{rh}{2(h-r)} \pm \sqrt{\frac{r^2h^2}{4(h-r)^2} - \frac{ry}{2\pi(h-r)}}$. Soll x reell bleiben, so darf höchstens $\frac{ry}{2\pi(h-r)} = \frac{r^2h^2}{4(h-r)^2}$ oder $y = \frac{rh^2\pi}{2(h-r)}$ sein. Die entsprechenden Werthe für x und z sind dann

$$x = \frac{hr}{2(h-r)};\ z = \frac{h(h-2r)}{2(h-r)}.$$

Aus dem Werthe für z folgt, daß nicht aus jedem geraden Kegel ein solcher Cylinder geschnitten werden kann, sondern daß $h > 2r$ sein muß.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

6. Eine Zahl $2a$ in zwei Posten zu zerlegen, daß die Summe der aus den Posten gebildeten beiden Brüche ein Minimum wird.

Sind die beiden Posten x und $2a-x$, so erhält man aus 1) $\frac{x}{2a-x} + \frac{2a-x}{x} = y$ für y den Werth 2 und für x und $2a-x$ den Werth a, d. h. um das Minimum der beiden Brüche zu erhalten, muß die Zahl in zwei gleiche Posten getheilt werden.

7. Das Maximum der Function $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$ zu suchen, wenn a und b zwei absolute Zahlen bezeichnen.

Aus der Gleichung $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2} = y$ erhält man für y den Werth $\frac{(a+b)^2}{4ab}$ und für x den Werth $\frac{2ab}{a-b}$.

4. Aus den Auflösungen der vorangeschickten Aufgaben folgt:

α. Daß von dem Werthe des y unter dem Wurzelzeichen die Möglichkeit eines endlichen Minimi oder Maximi abhängig ist. Ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen so beschaffen, daß er unbedingt positiv bleibt, welchen Werth y auch erhalten mag, so folgt hieraus, daß sein Maximum und Minimum unendlich groß und unendlich klein oder gleich 0 ist, daß also von keinem endlichen Maximal- und Minimalwerthe die Rede sein kann. Hat die Function $\frac{4x^2+4x-3}{6(2x+1)}$ ein Maximum oder Minimum?

β. Daß in jedem Falle durch die oben angegebene Methode die Maxima und Minima bestimmt werden können, wenn unter dem Wurzelzeichen nur y^2 oder y in einem Gliede vorkommt und das andere Glied nur bekannte Größen enthält, oder wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in Bezug auf y eine Gleichung des ersten oder eine reine Gleichung des zweiten Grades ist. Dagegen genügt die an den Beispielen erläuterte Lösung nicht, wenn in Bezug auf y der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen eine gemischte quadratische Gleichung ist oder die allgemeine Form $ay^2 + by + c$ hat. In diesem Falle müssen beide Wurzeln dieser Gleichung gesucht und mit ihrer Hülfe die Maximal- und Minimalwerthe bestimmt werden. Dazu dienen die drei folgenden Sätze über gemischte quadratische Gleichungen.

5. Jede gemischte quadratische Gleichung von der Form $\pm y^2 \pm by \pm c = 0$, welche zwei reelle ungleiche Wurzeln (y', y'') hat, gibt für jeden Werth, der zwischen den beiden Wurzeln liegt, ein Resultat mit entgegengesetzten Vor-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

zeichen, und für jeden Werth außerhalb der beiden Wurzeln ein Resultat mit demselben Vorzeichen, welches der Coefficient a von y^2 hat.

Beweis: Für $ay^2 + by + c = 0$ kann man auch $a\left(y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}\right) = 0$ setzen. Sind ferner y' und y'' die Wurzeln der Gleichung $ay^2 + by + c = 0$, so ist auch $ay^2 + by + c = a(y - y')(y - y'')$. Substituirt man in dem Producte $(y - y')(y - y'')$ für y einen zwischen y' und y'' liegenden Werth α, so bekommen unbedingt die beiden Factoren $(\alpha - y')$ und $(\alpha - y'')$, y' und y'' mögen beide positive oder negative oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, entgegengesetzte Vorzeichen und ihr Product $(\alpha - y')(\alpha - y'')$ wird nothwendiger Weise negativ. Das ganze Resultat $a(\alpha - y')(\alpha - y'')$ oder $a\alpha^2 + b\alpha + c$ bekommt daher das entgegengesetzte Vorzeichen von a. — Substituirt man dagegen für y einen außerhalb y' und y'' liegenden Werth α', so erhalten beide Factoren $(\alpha' - y')$ und $(\alpha' - y'')$ gleiche Vorzeichen, ihr Product wird demnach positiv und das Gesammtresultat erhält das Vorzeichen, welches a hat.

Wenn die Gleichung $6x^2 + x - 12$ die beiden Wurzeln $^4/_3$ und $-\,^3/_2$ hat, für welche Werthe von x erhält man ein positives, für welche ein negatives Resultat?

6. Sind die beiden Wurzeln einer gemischten quadratischen Gleichung gleich und reell, so gibt jede von ihnen verschiedene Größe ein Resultat mit demselben Vorzeichen, das der Coefficient von y^2 hat.

Beweis: Sind die beiden Wurzeln der Gleichung $ay^2 + by + c = 0$ gleich und reell, so muß nach §. 68, 13. b nothwendig $b^2 - 4ca = 0$, oder $c = \frac{b^2}{4a}$ sein. Demnach erhält in diesem Falle die Gleichung $ay^2 + by + c = 0$ die Form $ay^2 + by + \frac{b^2}{4a} = a\left(y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{b^2}{4a^2}\right)$ $= a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2$. So lange nun der eingeklammerte Factor nicht $= 0$ oder $y = -\frac{b}{2a}$ ist, so lange bleibt das Quadrat desselben nothwendiger Weise positiv. Das Resultat hat daher mit a dasselbe Vorzeichen.

7. Sind die beiden Wurzeln einer gemischten quadratischen Gleichung imaginair, so gibt jeder reelle positive oder negative Werth für y in der Gleichung substituirt ein Resultat mit demselben Vorzeichen, das der Coefficient von y^2 hat.

Beweis: Sind die beiden Wurzeln der Gleichung $ay^2 + by + c = 0$ imaginair, so muß $4ac > b^2$ sein (§. 68, 13. c). Dividirt man auf bei-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

den Seiten mit $4a^2$, so ist $\frac{c}{a} > \frac{b^2}{4a^2}$. Wird in diesem Ausdrucke der Ueberschuß von $\frac{c}{a}$ über $\frac{b^2}{4a^2}$ mit δ bezeichnet, so ist $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + \delta$ und die Gleichung $ay^2 + by + c = 0$ erhält in diesem Falle die Form $a\left(y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{b^2}{4a^2} + \delta\right) = a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\delta = 0$. In diesem Ausdrucke kann für y jeder beliebige positive oder negative Werth gesetzt werden; der Ausdruck erthält jedenfalls dasselbe Vorzeichen, das a hat.

8. Mit Hülfe der drei voranstehenden Sätze verfährt man nun zur Bestimmung der Maximal- und Minimalwerthe auf folgende Weise. Man suche die Wurzeln der gemischten quadratischen Gleichung für y oder für den Maximal- oder Minimalwerth, so lassen sich durch die früheren drei Sätze die Maxima und Minima sehr leicht bestimmen und aus ihnen ebenfalls der zugehörige Werth von x, wie in einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Beispiel 1. Hat die Function, deren Maximal- oder Minimalwerth gesucht werden soll, für x aufgelöst die Form $x = -3a \pm \sqrt{y^2 + 6y - 7}$, so muß, wenn x reell sein soll, der Werth von $y^2 + 6y - 7$ positiv oder $= 0$ sein. Da nun die beiden Wurzeln der Gleichung $y^2 + 6y - 7 = 0$, 1 und -7 sind, so führt jeder Werth zwischen 1 und -7 zu negativen und jeder Werth außerhalb 1 und -7 zu positiven Werthen (5). Demnach ist 1 der positive Minimalwerth für y und -7 der negative Maximalwerth für y, wenn x reell sein soll.

Beispiel 2. Hat die Function, deren Maximal- oder Minimalwerthe gesucht werden sollen, für x aufgelöst, die Form

$$x = 2m \pm \sqrt{-y^2 + 26y + 120},$$

so muß, wenn x reell sein soll, der Werth von $-y^2 + 26y + 120$ positiv oder $= 0$ sein. Da nun die beiden Wurzeln der Gleichung 30 und -4 sind, so führt jeder Werth zwischen 30 und -4 zu positiven, sowie jeder Werth außerhalb 30 und -4 zu negativen Werthen. Demnach ist 30 das Maximum für die positiven und -4 das Maximum für die negativen Werthe von y.

Beispiel 3. Hat die Function, deren Maximal- und Minimalwerthe gesucht werden sollen, für x aufgelöst die Form

$$x = -m \pm \sqrt{y^2 - 12y + 36} = 0,$$

so muß, wenn x reell sein soll, der Werth von $y^2 - 12y + 36$ positiv oder $= 0$ sein. Da nun die beiden Wurzeln der Gleichung $= 6$ sind, so führt nach (6) nicht nur 6, sondern jeder von 6 verschiedene positive oder negative Werth zu einem positiven Re-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

sultate. Demnach hat die Function weder einen endlichen Minimal- noch Maximalwerth.

Bemerkung. Eine viel allgemeinere Methode, die Maxima und Minima von Functionen zu bestimmen, gibt die Bemerkung an die Hand, daß in der Nähe der Maximal- und Minimalwerthe die Functionen paarweise gleiche Werthe erhalten, und eine ganz allgemeine Methode gibt die Differentialrechnung in der Aufsuchung der Differentiale an die Hand.

§. 71 (Heis, §. 73).

Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

1. Eine quadratische Gleichung mit mehreren Unbekannten darf keine höhere als zweite Potenzen und keine Producte aus mehr als zwei unbekannten Factoren enthalten. Die allgemeine Form der vollständigen und quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten ist daher: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$. Welche Glieder dürfen in ihr fehlen, wenn sie eine Gleichung vom zweiten Grade bleiben soll? Welche Glieder enthält die vollständige Gleichung mit drei Unbekannten?

2. Die allgemeine Auflösung der quadratischen Gleichungen mit zwei und mehr Unbekannten überschreitet die Grenzen der von uns gewonnenen Kenntnisse, da sie auf die Lösung von Gleichungen des vierten Grades mit einer Unbekannten führt.

Beweis: Hat man aus den beiden Gleichungen $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ und $a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y + f' = 0$ durch Anwendung der Subtractionsmethode x^2 eliminirt, so erhält man für x eine Gleichung des ersten Grades. Die Lösung derselben gibt als Werth für x einen Bruch, dessen Zähler eine gemischte quadratische Gleichung für y oder von der Form $Ay^2 + By^2 + C = 0$ ist. Wird dieser Werth für x in einer der gegebenen Gleichungen substituirt, so erhält man für y eine Gleichung des vierten Grades.

3. Sind dagegen nicht alle Glieder in solchen Gleichungen vorhanden, ist namentlich eine oder mehrere der gegebenen Gleichungen vom ersten Grade, so genügen die bisher gewonnenen Kenntnisse und Eliminationsmethoden, besonders dann, wenn durch Einführung von Hülfsgrößen die Unbekannten nicht unmittelbar, sondern mittelbar durch diese Hülfsgrößen gefunden werden können. Solche Hülfsgrößen sind Summen, Differenzen, Producte, Quotienten und Potenzen, kurz Functionen der Unbekannten. Wie dies geschieht, soll an den nun folgenden Beispielen erörtert und zur Anschauung gebracht werden.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

1. Heis, 1. 1. $xy = a$

2. $\frac{x}{y} = b.$

Statt Gleichung 2 für x aufzulösen und seinen Werth $= by$ in Gleichung 1 zu substituiren, multiplicire man beide Gleichungen, um $x^2 = ab$ und aus ihr $x = \pm\sqrt{ab}$ zu erhalten.

2. Heis, 7. 1. $x^2 + xy = a$

2. $yx + y^2 = b.$

Durch Addition beider Gleichungen und Radicirung ihrer Summe erhält man 3. $x + y = \pm\sqrt{a+b}$ und durch Division mit Gleichung 3 in Gleichung 1 oder 2 unmittelbar $x = \pm\frac{a}{\sqrt{a+b}}$ und $y = \pm\frac{b}{\sqrt{a+b}}.$

3. Heis, 12. 1. $(x-2)(y-3) = 1$

2. $\frac{x-2}{y-3} = 1$

ganz wie Beispiel 1 zu behandeln.

4. Heis, 13. $(x+y)^2 - 2x^2 = 49$

$3x^2 + 4(x+y)^2 = 372.$

Durch Elimination von $(x+y)^2$ findet man x^2 und x und durch Substitution y. —

5. Heis, 15. 1. $x + y = s$

2. $xy = p.$

Statt die erste Gleichung für x oder y aufzulösen und ihre Werthe in 2 zu substituiren, kann man auch die erste Gleichung quadriren und von ihr $4xy = 4p$ subtrahiren, um $x - y = \pm\sqrt{s^2 - 4p}$ zu erhalten. Da man nun Summe und Differenz der Unbekannten gefunden hat, so findet man aus ihnen leicht die Unbekannten selbst. Welche allgemeine arithmetische Aufgabe steckt in den beiden Gleichungen? Wie hat man zu verfahren, wenn in der einen Gleichung statt der Summe die Differenz der gesuchten Zahlen gegeben ist? Wodurch unterscheiden sich beide Lösungen von einander? Warum sind in den ersten Aufgaben die beiden Werthe für x, zugleich auch, aber in umgekehrter Ordnung, die zugehörigen Werthe für y? Wie heißen solche Aufgaben oder Gleichungen? Beide Aufgaben und ihre Lösungsformeln können uns nun bei den folgenden Gleichungen nützlich werden, um dieselben auf diese schon gelösten Aufgaben zu reduciren. Wie z. B. in der folgenden Aufgabe

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

6. Heis, 23. 1. $x - y = \frac{a^2 - b^2}{(a+1)(b+1)}$

2. $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{a^2 - b^2}{(a-1)(b-1)}$

Aus Gleichung 1 und 2 wird leicht für xy die Gleichung 3. $xy = \frac{(a-1)(b-1)}{(a+1)(b+1)}$ gefunden. Mit Anwendung von 5 findet man

$$x = \frac{\frac{a^2 - b^2}{(a+1)(b+1)} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{(a+1)(b+1)}\right)^2 + \frac{4(a-1)(b-1)}{(a+1)(b+1)}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{a^2 - b^2}{(a+1)(b+1)} \pm \frac{a^2 + b^2 - 2}{(a+1)(b+1)}}{2} = \frac{a^2 - 1}{(a+1)(b+1)} = \frac{a-1}{b+1}$$

u. s. w.

7. Heis, 40. $x + y = xy = x^2 + y^2$.
$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 3xy$; daher $(xy)^2 = 3xy$ und $xy = 3$. Aus $x + y = 3$ und $xy = 3$ findet man leicht mit Anwendung von 5, x und y selbst.

8. Heis, 46. $-x^2 + 6xy - 9y^2 + 4x - 12y = 4$
$x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y = 53$.

Man bestimme aus der ersten Gleichung den Werth von $x = 3y + 2$ und substituire ihn in der zweiten Gleichung, so findet man y und aus seinen beiden Werthen auch x.

9. Heis, 48. 1. $x^2 + y^2 + 2xy - 2x(a+b) - 2y(a+b) = -4ab$
2. $x^2 + y^2 - 2xy + 2x(a-b) - 2y(a-b) = 4ab$.

Man bestimme aus der ersten Gleichung die beiden Werthe für $x + y$ nämlich $2a$ und $2b$ und aus der zweiten Gleichung für $x - y$ die beiden Werthe $2b$ und $-2a$ und aus ihnen die vier verschiedenen Werthe für x und y.

10. Heis, 54. 1. $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{3}{4}$

2. $2x^3 + 6xy^2 = \frac{9}{64}(x^2 - y^2)^3$.

Man bestimme aus Gleichung 1 den Werth von $y^2 = \frac{3x^2 - 8y}{3}$ und substituire ihn in Gleichung 2, so findet man x und aus seinen Werthen die von y.

11. Heis, 55. 1. $x + y = a$
2. $x^4 + y^4 = b$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Durch Quadrirung der ersten Gleichung erhält man $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$ und aus ihr 3. $x^2 + y^2 = a^2 - 2xy$. Quadrirt man Gleichung 3, so gibt dies $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = a^4 - 4a^2xy + 4x^2y^2$ oder $b + 2x^2y^2 = a^4 + 4x^2y^2 - 4a^2xy$ oder 4. $2x^2y^2 - 4a^2xy = b - a^4$.

Aus Gleichung 4 findet man $xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + b}{2}}$ u. s. w.

Gleichungen mit drei Unbekannten.

12. Heis, 72. 1. $x(y + z) = m$
2. $y(x + z) = n$
3. $z(x + y) = 0$.

Die Addition der drei Gleichungen gibt 4. $\frac{m + n + 0}{2} = xy + xz + yz$.

Von dieser Gleichung ziehe man jede der gegebenen Gleichungen ab, so erhält man die Werthe für xy, xz und yz. Multiplicirt man je zwei dieser Gleichungen und dividirt ihr Product durch die dritte Gleichung, so erhält man die Größen x, y, z selbst.

13. Heis, 73. 1. $\frac{z + y}{xyz} = -(c - a)^2$

2. $\frac{x + z}{xyz} = -(a - b)^2$

3. $\frac{y + x}{xyz} = -(b - c)^2$.

Man dividire Zähler und Nenner der linken Seite durch xyz, so erhält man Ausdrücke für $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{xz}$, $\frac{1}{yz}$. Bestimme darauf $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, und aus ihnen durch Umkehrung x, y, z.

14. Heis, 74. 1. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 13$
2. $x + y + z = 19$
3. $x(y + z) = 48$

Man mache Gleichung 1 rational, quadrire Gleichung 2, multiplicire Gleichung 3 mit 4 und ziehe dann die erste und dritte Gleichung von dem Quadrat der zweiten Gleichung ab, so erhält man

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2xz + 2zy + z^2 = 169 \text{ und aus ihr}$$
$$x - y - z = \pm 13 \text{ u. s. w.}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 72 (Heis, §. 75).

Erklärung einiger Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten führen und Bildung der zu ihrer Lösung nöthigen Gleichungen.

1. Aufgabe. Heis, 3. Eine bestimmte Anzahl Thaler, welche ich besitze, kann ich sowohl in Form eines Quadrates als auch in Form zweier Quadrate auf den Tisch legen; im ersten Falle kommen an jeder Seite 29 Thaler zu liegen, im zweiten Falle erhält das zweite Quadrat im Ganzen 41 Thaler mehr als das erste. Wie viel Thaler kommen an jeder Seite der beiden kleinern Quadrate zu liegen?

Kommen auf die Seite des ersten kleinern Quadrates x und auf die Seite des zweiten kleinern Quadrates y Thaler zu liegen, so ist die Summe sämmtlicher Thaler in beiden Quadraten $x^2 + y^2$. Da diese nun der Anzahl der Thaler in dem größern Quadrate, die gleich $(29)^2 = 841$ ist, ebenfalls gleich sein soll, so ist

$$1.\ x^2 + y^2 = 841.$$

Da ferner die Anzahl der Thaler in dem zweiten kleinern Quadrate um 41 größer sein soll als in dem ersten, so erhält man

$$2.\ y^2 - x^2 = 41.$$

2. Aufgabe. Heis, 5. Zwei Zahlen stehen in dem Verhältnisse 11 : 13 und geben zur Summe der Quadrate 14210. Wie heißen die Zahlen?

Bezeichnet man die Größe der Einheit in beiden Zahlen mit x, so enthält die eine $11x$ und die andere $13x$ solcher Einheiten. Da die Summe ihrer Quadrate 14210 sein soll, so ergibt sich daraus die Gleichung

$$(11x)^2 + (13x)^2 = 14210.$$

Oder: Bezeichnet man die beiden gesuchten Zahlen mit x und y, so erhält man die Proportion $x : y = 11 : 13$ oder 1. $11y = 13x$ und 2. $x^2 + y^2 = 14210$.

3. Aufgabe. Heis, 10. Länge, Breite und Höhe eines rechtwinkelig behauenen Steines stehen in dem Verhältnisse 5 : 3 : 1. Die ganze Oberfläche des Steins beträgt 15 Quadratfuß 94 Quadratzoll. Welche Länge, Breite und Höhe hat der Stein?

Hat die Höhe x Fuß, so hat die Länge $5x$ und die Breite $3x$ Fuß; die gesammte Oberfläche aus drei Paar gleichen Seitenflächen bestehend, hat $2(3x.5x + 3x.x + 5x.x)$ Quadratfuß. Da die Oberfläche nun zugleich 15 Quadratfuß 94 Quadratzoll betragen soll, so ist die Gleichung

$$2(15x^2 + 3x^2 + 5x^2) = 15\frac{94}{144}.$$

Oder: Haben Länge, Breite und Höhe x, y und z Fuß, so erhält man aus

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

der fortlaufenden Proportion $x : y : z = 5 : 3 : 1$ die beiden Gleichungen

$$1.\ 3x = 5y$$
$$2.\ \ y = 3z.$$

Da ferner die Oberfläche $2(xy + xz + yz)$ ist und diese 15 Quadratfuß 94 Quadratzoll sein soll, so ist die dritte Gleichung

$$2(xy + xz + yz) = 15\frac{94}{144}.$$

Welche Vorzüge hat der Ansatz mit einer Unbekannten vor dem mit drei Unbekannten?

4. Aufgabe. Heis, 13. Die Diagonalen dreier an einander stoßenden Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelopipeds sind a, b, c. Welchen Inhalt hat jede der drei Seitenflächen?

Bezeichnet man die Länge der drei aneinanderstoßenden Kanten der Seitenflächen mit x, y, z und zwar die Länge und Breite der Grundfläche mit x und y und die Höhe der Seitenflächen mit z, so gibt der pythagoräische Lehrsatz für x, y und z die drei Gleichungen

$$1.\ x^2 + y^2 = a^2;\ 2.\ x^2 + z^2 = b^2;\ 3.\ y^2 + z^2 = c^2.$$

Aus ihnen findet man unmittelbar x, y, z und mittelbar xy, xz, yz oder die Ausdrücke für die Größe der Seitenflächen.

5. Aufgabe. Heis, 21. Kehre ich die Ziffern einer gegebenen zweiziffrigen Zahl um, und multiplicire diese neue Zahl mit der erstern, so erhalte ich zum Producte 5092. Dividire ich aber die erste durch die zweite, so erhalte ich zum Quotienten 1 und zum Reste eine einziffrige Zahl. Wie heißt die Zahl?

Ist in der gesuchten Zahl die erste Ziffer linker Hand x und die zweite y, so ist $10x + y$ ein Ausdruck für die gesuchte Zahl und $10y + x$ ein Ausdruck für ihren Werth, wenn die Ziffern vertauscht sind. Da nun das Product aus beiden Ausdrücken $= 5092$ sein soll, so gibt dies

$$1.\ (10x + y)(10y + x) = 5092.$$

Da ferner Quotient und Rest bei der Division der gesuchten Zahl in der ersten Stellung durch die in der zweiten Stellung 1 sein soll, so kann der Unterschied der Ziffern nur 1 sein oder die zweite Gleichung ist

$$2.\ x - y = 1.$$

6. Aufgabe. Heis, 22. Vertausche ich die erste Stelle einer sechsziffrigen Zahl mit der vierten, die zweite mit der fünften, die dritte mit der sechsten, so erhalte ich eine zweite sechsziffrige Zahl, welche mit der ersten multiplicirt 122448734694 gibt und welche um die erstere vermindert, einen Rest hervorbringt, der dem Fünffachen der ersten Zahl gleichkommt. Wie heißt die Zahl?

Bezeichnet man in der gesuchten Zahl die drei ersten Ziffern linker Hand mit x und die drei letzten mit y, so ist $1000x + y$ ein Ausdruck für die

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

gesuchte Zahl in der ersten Stellung und $1000y + x$ ein Ausdruck für sie in der zweiten Stellung der Ziffern. Da nun das Product der beiden Zahlen $= 122448734694$ sein soll, so ist

$$1.\ (1000x + y)(1000y + x) = 122448734694.$$

Da ferner der Rest, den die Zahlen in der zweiten und ersten Stellung geben, dem Fünffachen der Zahl in der ersten Stellung gleich sein soll, so gibt die Gleichung

$$2.\ 1000y + x - (1000x + y) = 5(1000x + y)$$
oder $1000y + x = 6(1000x + y)$.

7. Aufgabe. Heis, 37. Bacchus fand den Silen neben einem vollen Fasse schlafend; er benutzte die Gelegenheit und trank während zweier Drittel der Zeit, welche Silen gebraucht hätte, um das ganze Faß zu leeren. Nachdem Silen erwacht war, trank er den von Bacchus übrig gelassenen Rest. Hätten beide zusammengetrunken, so würden sie um 2 Stunden früher mit diesem Fasse fertig geworden sein; Bacchus hätte aber alsdann nur halb so viel getrunken, als er vorher dem Silen übrig gelassen hatte. In welcher Zeit hätte jeder allein das Faß geleert?

Hat B das Faß in x Stunden geleert, so hat er in einer Stunde $\frac{1}{x}$ getrunken.
„ S „ „ „ y „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{1}{y}$ „

B hat in $^2/_3\, y$ Stunden $\frac{2y}{3x}$ getrunken. Der Rest ist demnach $1 - \frac{2y}{3x} = \frac{3x - 2y}{3x}$. S trinkt diesen Rest in $\frac{3x-2y}{3x} \cdot y$ Stunden. B und S zusammen trinken in einer Stunde $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$ und trinken zusammen das Faß in $\frac{xy}{x+y}$ Stunden leer. Daher erhält man Gleichung

$$1.\ \frac{xy}{x+y} + 2 = {}^2/_3\, y + \frac{3x-2y}{3x} \cdot y$$ (Gleichung für die Zeit)

$$2.\ \left(\frac{xy}{x+y} \cdot \frac{1}{x}\right) 2 = \frac{3x - 2y}{3x}$$ (Gleichung für die Quantität des Getrunkenen).

8. Aufgabe. Heis, 44. Wie groß sind Länge, Breite und Höhe eines rechtwinkligen Parallelopipeds, wenn die Diagonale a Zoll, die Oberfläche b Quadratzoll enthält und wenn die Länge die Summe der Breite und Höhe um c Zoll übertrifft?

Bezeichnet man die Größe der Länge, Breite und Höhe mit x, y und z, so erhält man für das Quadrat der Diagonale die Gleichung

$$1.\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$ und für die Oberfläche die Gleichung
$$2.\ 2(xy + xz + yz) = b$$
endlich für den Unterschied der Länge gegen Breite und Höhe die Gleichung
$$3.\ x - (y + z) = c.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

9. Aufgabe. Heis, 47. In einer geometrischen Proportion ist die Summe der beiden inneren Glieder a, die Summe der beiden äußeren Glieder b und die Summe der Quadrate aller Glieder c. Wie heißt die Proportion?

Sind x und y die beiden ersten Glieder der Proportion, so ist die Proportion, da die Summe der inneren Glieder a und die der äußeren b ist

$$1.\ x : y = a - y : b - x \text{ oder } bx - x^2 = ay - y^2.$$

Da ferner die Summe der Quadrate aller vier Glieder c ist, so gibt dies die Gleichung $x^2 + y^2 + (a - y)^2 + (b - x)^2 = c$.

Oder: Bezeichnen wir die vier Glieder der Proportion mit u, x, y, z, die Summe der inneren Glieder mit $2a$, die Summe der äußeren Glieder mit $2b$ und die Summe der Quadrate der vier Glieder mit $4c^2$, um Brüche zu vermeiden, so erhält man für die vier gesuchten Größen aus den Angaben und den Eigenschaften der geometrischen Proportion folgende vier Gleichungen

$$\begin{aligned} &1.\ u + z = 2b \\ &2.\ x + y = 2a \\ &3.\ uz = xy \\ &4.\ u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 4c^2. \end{aligned}$$

Führt man nun für das Product der inneren oder äußeren Glieder die Hülfsgröße w ein, so erhält man für die Bestimmung der vier Glieder durch diese Hülfsgröße zwei Paare von Gleichungen und zwar

$$1.\ u + z = 2b \text{ und } 2.\ x + y = 2a$$
$$\text{und } uz = w \qquad xy = w$$

und aus ihnen:

$$\begin{aligned} &1.\ u = b + \sqrt{b^2 - w} \\ &2.\ z = b - \sqrt{b^2 - w} \\ &3.\ x = a + \sqrt{a^2 - w} \\ &4.\ y = a - \sqrt{a^2 - w}. \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen erhält man mit Berücksichtigung der Bedingung über die Summe der Quadrate aller vier Glieder für w die Gleichung

$$(b + \sqrt{b^2 - w})^2 + (b - \sqrt{b^2 - w})^2 + (a + \sqrt{a^2 - w})^2 + (a - \sqrt{a^2 - w})^2 = 4c^2$$

und aus ihr $w = a^2 + b^2 - c^2$.

Substituirt man endlich diesen Werth für w in die Gleichungen für u, x, y, z, so erhält man

$$\begin{aligned} u &= b + \sqrt{c^2 - a^2} \\ x &= a + \sqrt{c^2 - b^2} \\ y &= a - \sqrt{c^2 - b^2} \\ z &= b - \sqrt{c^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Welche Vorzüge hat die Auflösung der Aufgabe durch die Einführung der Hülfsgröße vor der erstern Auflösung?

10. Aufgabe. Heis, 50. Es werden drei Zahlen in stetiger Proportion gesucht, deren Summe a und deren Quadratsumme b ist. Welche Zahlen sind es?

Setzt man als Hülfsgröße die Summe des ersten und dritten Gliedes $= x$, so ist das mittlere Glied $= a - x$. Setzt man ferner die Differenz des ersten und dritten Gliedes als eine zweite Hülfsgröße $= y$, so ist das

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

erste Glied $= \frac{x+y}{2}$ und das dritte $= \frac{x-y}{2}$. Da nun in jeder Proportion das Product der äußeren und inneren Glieder gleich ist, so ist:

$$1.\ \frac{x^2-y^2}{4} = (a - x^2)$$

Da ferner die Summe der Quadrate $= b$ ist, so ist

$$2.\ \frac{2x^2 + 2y^2}{4} + (a-x)^2 = b.$$

Aus ihnen findet man zuerst x, dann das mittlere Glied $a - x$ und y, und aus ihren Werthen endlich das erste und dritte Glied oder $\frac{x+y}{2}$ und $\frac{x-y}{2}$.

11. Aufgabe. Heis, 56. Die reellen Werthe für x und y zu finden, so daß $(x + y\sqrt{-1})^2 = a + b\sqrt{-1}$.

Beispiel: $(x + y\sqrt{-1})^2 = -5 + 12\sqrt{-1}$.

Da $(x + y\sqrt{-1})^2 = a + b\sqrt{-1}$ sein soll, so erhält man durch Quadrirung der linken Seite die Gleichung $x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1}$ und aus ihr mit Anwendung von §. 49, 12 die beiden Gleichungen 1. $x^2 - y^2 = a$ und
2. $2xy = b$.

Quadrirt man diese beiden Gleichungen und addirt das Quadrat der zweiten zu dem Quadrate der ersten, so erhält man für $x^2 + y^2$ die Gleichung

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Da nun zugleich nach Gleichung 1 $x^2 - y^2 = a$ ist,

so ist $x^2 = {}^1/_2\,(a + \sqrt{a^2 + b^2})$

und $y^2 = {}^1/_2\,(-a + \sqrt{a^2 + b^2})$

Aus ihnen endlich folgt:

$$x = \pm\sqrt{{}^1/_2\,(a + \sqrt{a^2 + b^2})}$$

$$y = \pm\sqrt{{}^1/_2\,(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}.$$

Substituirt man in den Formeln für x und y die speciellen Werthe für a und b und zwar für $a = -5$ und für $b = 12$, so erhält man $x = \pm 2$
und $y = \pm 3$.

Diophantische Gleichungen.

§. 73.

Von den unbestimmten Gleichungen im Allgemeinen und den diophantischen Gleichungen im Besondern.

1. Wenn eine oder mehrere zusammengehörige Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten gegeben sind, so sind in Bezug auf das Zahlenverhältniß der Gleichungen und der in ihnen vorkommenden Unbekannten drei Fälle gleich möglich

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

a. Die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten ist gleich.

b. Die Anzahl der Gleichungen ist kleiner als die Anzahl der Unbekannten.

c. Die Anzahl der Gleichungen ist größer als die Anzahl der Unbekannten.

Da im ersten Falle die Unbekannten durch die gegebenen Gleichungen, wenn sie unabhängig sind und sich nicht widersprechen, vollständig bestimmt sind, so heißen sie bestimmte Gleichungen; da im zweiten Falle die Unbekannten nicht vollkommen bestimmt sind, weil in dem Werthe für irgend eine Unbekannte noch eine oder mehrere andere Unbekannte vorkommen, die willkürlich bestimmt werden können, so heißen sie unbestimmte Gleichungen; da endlich im dritten Falle mehr Gleichungen, als zur Bestimmung der Unbekannten erfordert werden, gegeben sind, so heißen sie überbestimmte Gleichungen. In allen drei Fällen sollte man eigentlich passender von bestimmten, unbestimmten und überbestimmten Aufgaben als Gleichungen reden. Wir wollen uns in den nächsten §§. mit den unbestimmten Gleichungen oder Aufgaben beschäftigen.

2. Sind m zusammengehörige Gleichungen mit n Unbekannten gegeben und ist $n > m$, so kann man immer $m - 1$ Unbekannte eliminiren und wird eine Gleichung mit $n - m + 1$ Unbekannten zurückbehalten, in der im Allgemeinen $n - m$ Unbekannte willkürlich bestimmt werden können. Die Unbestimmtheit nimmt daher mit der Ungleichheit zwischen der Anzahl der Unbekannten und Gleichungen zu.

3. Die unbestimmten Gleichungen oder Aufgaben würden gar nicht Gegenstand einer besondern wissenschaftlichen Betrachtung werden, wenn nicht bei ihnen durch manche in der Natur vieler Aufgaben liegende Nebenbedingungen die Unbestimmtheit großentheils, ja oft auch ganz gehoben würde. Diese Nebenbedingungen rauben den Aufgaben aber nicht allein ihren Charakter der Unbestimmtheit, sondern drücken den Lösungen zugleich ein ganz eigenthümliches Gepräge auf, das vollständig von dem allgemeinen Verfahren bei der Auflösung bestimmter Gleichungen abweicht.

4. Diejenigen unbestimmten Aufgaben nun, in denen die Unbestimmtheit durch gewisse Nebenbedingungen entweder ganz oder zum Theil gehoben ist, heißen nach dem griechischen Mathematiker, der vorzugsweise solche Aufgaben behandelt hat, diophantische Aufgaben und der Theil der Algebra, der sich mit den verschiedenen Methoden ihrer Lösung beschäftigt, unbestimmte Analytik.

5. Die diophantischen Aufgaben zerfallen wie die bestimmten Aufgaben in Aufgaben des ersten, zweiten und höherer Grade. Die Schwierigkeiten einer allgemeinen Lösung solcher Aufgaben wachsen hier noch mehr und rascher als bei den bestimmten Aufgaben und wir werden uns daher nur mit den einfachsten Aufgaben der beiden ersten Grade beschäftigen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

6. Die oben erwähnten und hier die Hauptrolle spielenden Nebenbedingungen sind besonders folgende: gegebene und gesuchte Zahlen unterliegen gewöhnlich denselben Bedingungen; gegebene und gesuchte Zahlen sollen positive Zahlen sein; gegebene und gesuchte Zahlen dürfen auch negativ sein; gegebene und gesuchte Zahlen sollen rationale Zahlen sein, entweder allein ganze oder auch gebrochene Zahlen. Häufig sollen die gesuchten Zahlen zwischen bestimmten Grenzen liegen u. s. w. Die Nationalität wird gewöhnlich bei den Aufgaben des zweiten Grades allein gefordert, bei den Aufgaben des ersten Grades handelt es sich meistens nur um die Bestimmung von positiven ganzen Zahlen.

7. Um das in 6 im Allgemeinen Angedeutete zu veranschaulichen, wird es genügen, die Aufgaben in §. 79 unserer Sammlung kurz durchzugehen, um dem Schüler leicht die Ueberzeugung beizubringen, daß solche Nebenbedingungen nicht in der Caprice des Mathematikers, sondern in der Natur der Aufgaben ihren einfachen Grund haben.

§. 74.
Von den diophantischen Gleichungen des ersten Grades.

1. Die allgemeine Form der diophantischen Gleichungen des ersten Grades ist: $ax + by + cz + \ldots n = 0$; in ihr kann $n = 0$ sein. a, b, c werden gewöhnlich als ganze Zahlen vorausgesetzt. Von den gesuchten Zahlen wird unbedingt gefordert, daß sie ganze, häufig auch daß sie positive ganze Zahlen sind. Da die Auflösung der Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten auf die Auflösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten zurückgeführt wird, so beginnen wir mit ihrer allgemeinen Lösung und Discussion.

2. Jede Gleichung des ersten Grades mit zwei Unbekannten läßt sich auf die Form $ax \pm by = \pm c$ bringen, in der nach 1. a, b, c ganze Zahlen bedeuten.

3. Jede Gleichung des ersten Grades von der Form $ax \pm by = \pm c$, die in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, oder in der a, b, c kein gemeinschaftliches Maß haben, kann nur dann für x und y ganze Zahlen geben, wenn a und b relative Primzahlen gegeneinander sind oder keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

Beweis: Denn haben a und b den gemeinschaftlichen Factor f und ist $a = mf$ und $b = nf$, so geht die Gleichung $ax + by = c$ in folgende, $mfx + nfy = c$ über. Dividirt man sie durch f, so erhält man $mx + ny = \frac{c}{f}$, was unmöglich ist, so lange x und y ganze Zahlen sind, da $\frac{c}{f}$ nothwendig ein Bruch ist.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Der eben bewiesene Satz gibt demnach ein leichtes Kennzeichen für die Möglichkeit der Lösung in ganzen Zahlen an, wenn die Gleichung auf den kleinsten Ausdruck gebracht ist.

Auflösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen.

4. Die Auflösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten soll zwar an einer speciellen Zahlengleichung gezeigt, aber so erörtert werden, daß ihre allgemeine Gültigkeit deutlich hervortritt.

Soll eine Gleichung mit zwei Unbekannten ($8x + 13y = 159$), deren Coefficienten (8 und 13) relative Primzahlen sind, gelöst werden, so löse man sie für die Größe (x) auf, welche den kleinsten Coefficienten (8) hat $\left(x = \frac{159 - 13y}{8}\right)$ und verwandele den für sie gefundenen Werth in eine ganze Zahl und einen angehängten Bruch $\left(x = 19 - y + \frac{7 - 5y}{8}\right)$. Soll dieser ganze Ausdruck nun einer ganzen Zahl (x) gleich sein, so muß der angehängte Bruch $\left(\frac{7 - 5y}{8}\right)$ einer ganzen Zahl gleich sein. Man setze daher vorläufig diesen Bruch der näher zu bestimmenden ganz willkürlich gewählten Zahl w' gleich und löse diese zweite Gleichung $\left(w' = \frac{7 - 5y}{8}\right)$ für y d. h. für diejenige Unbekannte auf, die den kleinsten Coefficienten hat. Mit ihrem Werthe $\left(y = \frac{7 - 8w'}{5}\right)$ verfahre man ebenso wie mit dem vorhin gefundenen Werthe, d. h. zerlege ihn in einen ganzen Bestandtheil und einen angehängten Bruch $\left(y = 1 - w' + \frac{2 - 3w'}{5}\right)$. Soll dieser Ausdruck eine ganze Zahl sein, so muß der ihm angehängte Bruch $\left(\frac{2 - 3w'}{5}\right)$ eine ganze Zahl sein. Setzt man diesen Bruch nun abermals einer zweiten willkürlich gewählten Zahl w'' gleich, so erhält man eine dritte Gleichung für w' und w'', $\left(w'' = \frac{2 - 3w'}{5}\right)$, welche wiederum für w' aufgelöset und in eine ganze Zahl und einen angehängten Bruch verwandelt, eine neue zu bestimmende Willkürliche (w''') gibt. Auf diese Weise fahre man fort immer neue Willkürliche zu bestimmen, bis man zu einer Willkürlichen kommt, deren Coefficient 1 ist, und deren Werth also als ganze Zahl erscheint. Daß die erörterte Auflösung nothwendig zu einer Willkürlichen mit dem Coefficienten 1 führen muß, geht daraus hervor, daß die Gleichungen fortwährend für die Unbekannte mit dem kleinsten Coefficienten aufgelöst sind, daß also Divisoren und Reste nothwendig immer kleiner werden und zuletzt zu 1 herabsinken

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

müssen, da die Coefficienten Primzahlen sind und das ganze Verfahren, in Bezug auf die Coefficienten, wie nun wohl klar vorliegen wird, gerade dasselbe ist, wie das bei der Auflösung des größten gemeinschaftlichen Maßes zu zwei Primzahlen angewandte. Ist die letzte Willkürliche (w'') bestimmt, so bestimme man rückwärts durch Substitution ihres Werthes, die vorhergehende (w') und so fort bis zu y und x.

Um dem Anfänger die Aufstellung der Rechnung zu zeigen und den Zusammenhang kurz darzulegen, mag das obige Beispiel ohne eingeflochtene Erörterung folgen:

Beispiel: $8x + 13y = 159$.

1. $x = \frac{159 - 13y}{8} = 19 - y + \frac{7 - 5y}{8} = 19 - y + w'$ wenn
$$w' = \frac{7 - 5y}{8}$$

2. $y = \frac{7 - 8w'}{5} = 1 - w' + \frac{2 - 3w'}{5} = 1 - w' + w''$ wenn
$$w'' = \frac{2 - 3w'}{5}$$

3. $w' = \frac{2 - 5w''}{3} = - w'' + \frac{2 - 2w''}{3} = - w'' + 2w$ wenn
$$w = \frac{1 - w''}{3}$$

4. $w'' = 1 - 3w$.

Durch Substitution von $w'' = 1 - 3w$ in die Gleichungen für w, y und x erhält man:

$$w' = \frac{2 - 5w''}{3} = \frac{2 - 5(1 - 3w)}{3} = -1 + 5w$$

$$y = \frac{7 - 8w'}{5} = \frac{7 - 8(-1 + 5w)}{5} = 3 - 8w$$

$$x = \frac{159 - 13y}{8} = \frac{159 - 13(3 - 8w)}{8} = 15 + 13w.$$

Der Gleichung $8x + 13y = 159$ wird also durch ganze Zahlen für x und y genügt, wenn $x = 15 + 13w$ und $y = 3 - 8w$ und w irgend eine ganze Zahl ist.

Ist $w =$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	...
so ist $y = 3 - 8w =$	51	43	35	27	19	11	3	-5	-13	-21	...
und $x = 15 + 13w =$	-63	-50	-37	-24	-11	2	15	28	41	54	...

Sollen x und y positive ganze Zahlen sein, so genügen nur die beiden Werthe 0 und -1 für w, welche für x und y zugleich positive Werthe geben.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Die allgemeine Gültigkeit des Verfahrens, selbst in den Fällen, wo keine ganze Zahlen für x und y möglich sind, wo die Auflösung zu dem Widerspruche, daß eine ganze Zahl einem Bruche gleich sei, führen muß, und der Beweis, daß auf diese Weise für x und y ganze Zahlen gefunden werden, ist so leicht aus dem ganzen Verfahren ersichtlich, daß er dem Nachdenken des Schülers überlassen werden kann.

5. Die allgemeine Auflösung in 4, die oft weitläufig werden kann, wird besonders durch zwei Hülfsmittel sehr erleichert und abgekürzt, nämlich durch Absonderung gemeinschaftlicher Factoren und durch negative Restbestimmungen bei zu groß genommenen Quotienten. Es wird genügen den Nutzen an einigen passenden Beispielen zu zeigen, wobei dem Anfänger vor allen Dingen die richtige Bestimmung der Vorzeichen zu zeigen ist, damit er nicht statt Gewinn Verlust durch die Abkürzung davonträgt.

Beispiele:

1. $17x - 40y = 363.$

$$x = \frac{363 + 40y}{17} = 21 + 2y + \frac{6 + 6y}{17} = 21 + 2y + 6 \cdot \frac{1 + y}{17}$$

$$= 21 + 2y + 6w \text{ wenn } w = \frac{1 + y}{17} \text{ ist,}$$

$y = 17w - 1$ und durch Substitution

$$x = \frac{363 + 40(17w - 1)}{17} = 19 + 40w.$$

In diesem Falle kann für w jede positive ganze Zahl gesetzt werden.

2. $23y - 45x = 419.$

$$y = \frac{419 + 45x}{23} = 18 + 2x + \frac{5 - x}{23} = 18 + 2x + w; \text{ wenn } w = \frac{5 - x}{23}$$

$x = 5 - 23w.$ Durch Substitution

$$y = \frac{419 + 45(5 - 23w)}{23} = 28 - 45w.$$

3. $37x + 56y = 3427.$

$$x = \frac{3427 - 56y}{37} = 92 - y + \frac{23 - 19y}{37} = 92 - y + w' \text{ wenn}$$

$$w' = \frac{23 - 19y}{37}$$

$$y = \frac{23 - 37w'}{19} = 1 - 2w' + \frac{4 + w'}{19} = 1 - 2w' + w \text{ wenn}$$

$$w = \frac{4 + w'}{19}$$

$w' = 19w - 4.$ Durch Substitution

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$y = \frac{23 - 37\,(19\,w - 4)}{19} = 9 - 37\,w$$

$$x = \frac{3427 - 56\,(9 - 37\,w)}{37} = 79 + 56\,w.$$

Bemerkung: In der Lehre von den Kettenbrüchen werden wir noch eine andere Methode für die Auflösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten kennen lernen.

6. Nach den bisher gerechneten Beispielen zu urtheilen, scheint 1 ein Zusammenhang zwischen den Coefficienten der Willkürlichen und denen der Unbekannten stattzufinden, 2 die Werthe für die Unbekannten sich durch eine beständige Differenz zu unterscheiden und 3 zwischen den Resultaten der Gleichungen $ax + by = c$ und $ax - by = c$ ein wesentlicher Unterschied statlzufinden. Ueber diese Punkte sollen uns die nächsten Sätze Gewißheit bringen.

7. Wenn $ax + by = c$ die allgemeine Form der unbestimmten Gleichung ist und wenn α und β zwei Werthe für x und y sind, die der Gleichung Genüge leisten, so sind alle übrigen Werthe, wenn w irgend eine willkürlich zu wählende Zahl bezeichnet, in den beiden Formeln

$$\left.\begin{array}{r} x = \alpha + bw \\ \text{und } y = \beta - aw \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} x = \alpha - bw \\ y = \beta + aw \end{array}\right\} \text{ enthalten,}$$

in denen die Coefficienten der Willkürlichen den Coefficienten der andern nicht zu bestimmenden Unbekannten gleich sind, und zwar der eine Coefficient mit demselben, der andere mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, welches der Coefficient der zugehörigen Unbekannten hat.

Beweis: Wenn α und β der Gleichung $ax + by = c$ genügen, so ist auch $a\alpha + b\beta = c$ und daher $ax + by = a\alpha + b\beta$ oder $a(x - \alpha) = -b\,(y - \beta)$ und daher $x - \alpha = -\dfrac{b\,(y - \beta)}{a}$.
Wenn aber die rechte Seite eine ganze Zahl sein soll, so muß, da a und b Primzahlen gegeneinander sind $\dfrac{y - \beta}{a}$, eine ganze Zahl sein.
Setzt man nun $\dfrac{y - \beta}{a} = \pm w$, so ist $y - \beta = \pm aw$ und daher $y = \beta \pm aw$ und $x = \alpha \mp bw$.

Beide Werthe genügen auch wirklich der Gleichung $a\alpha + b\beta = c$, da $a(\alpha \mp bw) + b\,(\beta \pm aw) = a\alpha + b\beta = c$.

Wie heißen die beiden Formeln für $ax - by = c$, wenn α und β wieder die beiden speciellen gefundenen Werthe bedeuten?

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

8. Setzt man in den beiden allgemeinen Formeln für

$$y = \beta \pm aw \text{ und für } x = \alpha \mp bw \text{ für } w$$
$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \text{ u. s. w.}$$

so wird $y = \beta;\ \beta \pm a;\ \beta \pm 2a;\ \beta \pm 3a;\ \beta \pm 4a \ldots$

und $x = \alpha;\ \alpha \mp b;\ \alpha \mp 2b;\ \alpha \mp 3b;\ \alpha \mp 4b \ldots$

so bilden die sämmtlichen Werthe für x und y eine Reihe von Größen (arithmetische Progression), in der jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Addition oder Subtraction einer und derselben Größe, dem Coefficienten der andern nicht zu bestimmenden Unbekannten, gebildet wird.

9. Aus den Vorzeichen, die b und c haben, ergibt sich, ohne Lösung der Gleichung $ax \pm by = \pm c$, auf den ersten Blick, ob die Lösung in positiven Werthen unbeschränkt, beschränkt oder unmöglich ist.

a. Wenn b negativ und c positiv oder negativ ist, so ist die Anzahl der positiven Werthe unbeschränkt. Denn selbst wenn die speciellen Werthe für x und y $-\alpha$ und $-\beta$ sind, so läßt sich in den allgemeinen Formeln für $x = -\alpha + bw$ und für $y = -\beta + aw$ immer eine unbeschränkte Menge von Werthen für w setzen, welche die Werthe für x und y positiv machen, nämlich alle diejenigen Werthe für w, wodurch $bw > \alpha$ und $aw > \beta$ oder $w > \frac{\alpha}{b}$ und $w > \frac{\beta}{a}$ wird.

b. Wenn b und c positiv sind, so hat die Gleichung $ax + by = c$ nur eine beschränkte Anzahl positiver Werthe für x und y; denn da $x = \frac{c - by}{a}$, so ist nur dann x positiv, wenn $by < c$ oder $y < \frac{c}{b}$ ist.

c. Wenn b positiv und c negativ ist, so hat die Gleichung $ax + by = -c$ gar keine positive Werthe für x und y; denn da $x = \frac{-c - by}{a}$ ist, so ist x nothwendig negativ, welcher positive Werth immerhin y beigelegt werden mag.

Fragen: Welche Vereinfachungen läßt die allgemeine Lösung für die speciellen Formen: $x \pm y = c$; $x \pm by = c$; $mx = ny$ zu, und wie wird die Willkürliche w in diesen Fällen bestimmt?

Auflösung der Gleichungen mit drei und vier Unbekannten, wenn zwei und drei Gleichungen zu ihrer Bestimmung gegeben sind.

10. Sollen zwei Gleichungen mit drei Unbekannten aufgelöst und nur positive ganze Zahlen für x und y zugelassen werden, so eliminire man eine

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Unbekannte, um eine Gleichung mit zwei Unbekannten zu erhalten; löse diese Gleichung nach 4 auf und substituire die gefundenen Werthe in eine der gegebenen Gleichungen, so erhält man eine neue Gleichung für die dritte früher eliminirte Unbekannte und die Willkürliche (w), durch welche die beiden anderen Unbekannten ausgedrückt sind. Wird diese Gleichung abermals nach 4 aufgelöst, so erhält man nicht nur den Werth der dritten Unbekannten, sondern auch den Werth der Willkürlichen w durch eine neue Willkürliche w' ausgedrückt. Substituirt man endlich den Werth der neuen Willkürlichen auch in die schon gefundenen Werthe für die beiden anderen Unbekannten, so sind alle drei Unbekannte durch dieselbe Willkürliche ausgedrückt. Aus den drei Formeln für die Unbekannten lassen sich dann auch leicht die Grenzen für w und die Anzahl der positiven Lösungen bestimmen.

Ein Beispiel wird zur Erläuterung des Verfahrens genügen. Sind

1. $6x + 7y + 4z = 122$

2. $11x + 8y - 6z = 145$ die gegebenen Gleichungen,

so erhält man durch Elimination von z für x und y die Gleichung:

3. $40x + 37y = 656$.

Wird diese nach 4 aufgelöset, so gibt sie die Werthe $x = 9 - 37w$ und $y = 8 + 40w$.

Substituirt man diese Werthe in Gleichung 1, so erhält man $6(9 - 37w) + 7(8 + 40w) + 4z = 122$ oder vereinfacht 4. $29w + 2z = 6$ und aus ihr $w = 2w'$ und $z = 3 - 29w'$. Drückt man endlich auch x und y durch w' aus, in dem man $2w'$ für w substituirt, so erhält man für x, y, z, durch dieselbe Willkürliche ausgedrückt, die Werthe: $x = 9 - 74w'$; $y = 8 + 80w'$; $z = 3 - 29w'$. Sollen alle drei Werthe für x, y, z positiv sein, so darf w' nur $= 0$ sein.

Sollte unter den Unbekannten eine mit den Coefficienten 1 versehen sein, so wird diese eliminirt. Warum?

11. Sind drei Gleichungen mit vier Unbekannten gegeben, so eliminire man eine Unbekannte, um zwei Gleichungen mit drei Unbekannten zu erhalten, löse diese nach 10 auf und bestimme die Werthe der in ihnen vorkommenden Unbekannten durch eine und dieselbe Willkürliche. Setzt man nun diese Werthe in eine der gegebenen Gleichungen, so erhält man eine neue Gleichung für die zuerst eliminirte Unbekannte und die Willkürliche. Mit dieser Gleichung verfahre man wie in 10 und drücke endlich sämmtliche Unbekannte durch dieselbe Willkürliche aus, so läßt sich ebenfalls aus den erhaltenen Formeln leicht entscheiden, ob und wie viele positive Lösungen möglich sind.

Als Beispiel zur Erläuterung möge Aufgabe 109, §. 65 unserer Sammlung dienen, aus der die vierte Bestimmungsgleichung fortgelassen ist.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Sind $\left\{\begin{array}{l} 1. \quad x - 2y + 3z - 4u = -10 \\ 2. \; -5x + 6y - 7z + 5u = 18 \\ 3. \quad 9x - 10y + 11z + 12u = 4 \end{array}\right\}$ die gegebenen Gleichungen,

so erhält man zuerst durch Elimination von x die beiden Gleichungen:

$$4. \quad y - 2z + 3u = 8$$
$$5. \quad 4y - 19z + 24u = 47$$

und aus ihnen durch Elimination von y die Gleichung

$$6. \quad 11z - 12u = -15.$$

Aus ihr erhält man $u = 11w + 4$ und $z = 12w + 3$. Substituirt man diese Werthe in 4, so erhält man für y und w die Gleichung: $y + 9w = 2$ und aus ihr unmittelbar $y = 2 - 9w$. Werden endlich die drei gefundenen Werthe für y, z, u in Gleichung 1 substituirt, so gibt dies für x und w die Gleichung $x + 10w = 1$ und für x den Ausdruck: $x = 1 - 10w$.

Demnach sind: $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - 10w \\ y = 2 - 9w \\ z = 3 + 12w \\ u = 4 + 11w \end{array}\right\}$ die vier durch w ausgedrückten Formeln.

Sollen alle vier Größen positiv sein, so darf w nur $= 0$ sein.

Auf eine ähnliche Weise würden auch vier Gleichungen mit fünf Unbekannten gelöst werden können u. s. w.

Auflösung einer Gleichung mit drei Unbekannten.

Um dem Anfänger einen Begriff zu geben von dem Verfahren, das bei der Auflösung von Gleichungen beobachtet wird, in denen noch größere Unbestimmtheiten vorkommen, oder in denen die Anzahl der Unbekannten die der Gleichungen um wenigstens zwei übertrifft, soll das Verfahren beschrieben und an einem speciellen Zahlenbeispiele erörtert werden, das man anwendet, um aus einer Gleichung drei Unbekannte in ganzen positiven Zahlen zu bestimmen.

Wir wählen zu diesem Zweck Beispiel 13 in §. 77 unserer Sammlung: $3x + 5y + 7z = 67$.

Wenn x, y, z positive ganze Zahlen mit Ausschluß der 0 sein sollen, so muß nothwendig $z < \frac{67 - 8}{7}$ oder $< \frac{59}{7} < 8^3/_7$ sein, oder darf nur die Werthe 1, 2, 3 . . . 8 haben.

Setzt man $z = 1$, so ist $3x + 5y + 7 = 67$
oder $3x + 5y = 60$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Wird diese Gleichung aufgelöst, so ergeben sich für x und y die Formeln:

$$x = 20 - 5\,w;\; y = 3\,w$$

und für $w = 1$ ist $x = 15$; $y = 3$
$w = 2$ „ $x = 10$; $y = 6$
$w = 3$ „ $x = 5$; $y = 9$

Setzt man $z = 2$; so ist $3\,x + 5\,y = 53$.
Wird diese Gleichung aufgelöst, so ergeben sich für x und y die Formeln:

$$x = 16 + 5\,w \text{ und } y = 1 - 3\,w$$

und für $w = 0$ ist $x = 16$ „ $y = 1$
$w = -1$ „ $x = 11$ „ $y = 4$
$w = -2$ „ $x = 6$ „ $y = 7$
$w = -3$ „ $x = 1$ „ $y = 10$.

Setzt man $z = 3$, so ist $3\,x + 5\,y = 46$.
Wird diese Gleichung aufgelöst, so ergeben sich für x und y die Formeln:

$$x = 17 - 5\,w \text{ und } y = 3\,w - 1$$

und für $w = 1$ ist $x = 2$ „ $y = 12$
$w = 2$ „ $x = 7$ „ $y = 5$
$w = 3$ „ $x = 2$ „ $y = 8$.

Setzt man $z = 4$, so ist $3\,x + 5\,y = 39$.
so wie $x = 13 - 5\,w$ und $y = 3\,w$
und für $w = 1$ ist $x = 8$ „ $y = 3$
$w = 2$ „ $x = 3$ „ $y = 6$.

Setzt man $z = 5$, so ist $3\,x + 5\,y = 32$
so wie $x = 9 + 5\,w$ und $y = 1 - 3\,w$
und für $w = 0$ ist $x = 9$ „ $y = 1$
$w = -1$ „ $x = 4$ „ $y = 4$.

Setzt man $z = 6$, so ist $3\,x + 5\,y = 25$
und $x = 5$ und $y = 2$.

Setzt man $z = 7$, so ist $3\,x + 5\,y = 18$
und $x = 1$ und $y = 3$.

Setzt man endlich $z = 8$, so ist $3\,x + 5\,y = 11$
und $x = 2$ und $y = 1$.

Anmerkung. Ein etwas abweichendes Verfahren bei der Auflösung ähnlicher Gleichungen soll im nächsten §. bei der Erklärung der Aufgabe 25, §. 79 unserer Sammlung erörtert werden.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 75.

Erklärung einiger unbestimmten Aufgaben, die auf Gleichungen des ersten Grades führen, und Bildung der zu ihrer Lösung nöthigen Gleichungen.

1. Wenn n jede beliebige Zahl bedeutet, so ist $2n$, $3n$, $4n$, $5n \ldots qn$ immer eine Zahl, die durch $2, 3, 4, 5 \ldots q$ ohne Rest theilbar ist.

2. Wenn wiederum n jede beliebige ganze Zahl bedeutet, so ist
   a. $2n \pm 1$ eine Zahl, die durch 2 dividirt, den Rest 1 läßt;
   b. $3n+1$ oder $3n-2$ und $3n+2$ oder $3n-1$ eine Zahl, die durch 3 dividirt, den Rest 1 und 2 läßt;
   c. $nq+r$ oder $nq-(q-r)$ eine Zahl, die durch q dividirt, den Rest r läßt.

Erklärung einiger Aufgaben.

1. Aufgabe. Heis, §. 79, 3. Eine bestimmte Anzahl Flaschen Mosel- und Rheinwein hat 10 Thaler 14 Neugroschen gekostet. Jede Flasche Moselwein kostet 12, jede Flasche Rheinwein 26 Ngr. Wie viel Flaschen von jeder Sorte waren es?

Ist die Anzahl der Flaschen Moselwein x und die Anzahl der Flaschen Rheinwein y, so kostet der Moselwein $12x$ und der Rheinwein $26y$ Silbergroschen. Da nun im Ganzen für den Wein 10 Thlr. 14 Ngr. = 314 Ngr. bezahlt ist, so erhält man die Gleichung: $12x+26y=314$.

2. Aufgabe. Heis, 9. Man ist im Stande, die Peripherie eines Kreises mit Hilfe einer elementar-geometrischen Construction in 3, 5 und 17 gleiche Theile zu theilen. Wie bestimmt man mit Hilfe dieser Theile $\frac{1}{51}$, $\frac{1}{75}$ und $\frac{1}{255}$ der Peripherie des Kreises?

Da $\frac{1}{51}$ nach unserer Aufgabe sich nur durch Subtraction zweier Brüche bilden soll, deren Nenner 3 und 17 sind, so handelt es sich um die Bestimmung ihrer Zähler. Bezeichnet man den Zähler zum Nenner 3 mit x und den zum Nenner 17 mit y, so erhält man die Gleichung

1. $\frac{x}{3}-\frac{y}{17}=\frac{1}{51}$; oder $17x-3y=1$.

Auf diese Weise erhält man die beiden anderen Gleichungen

2. $\frac{x}{5}-\frac{y}{17}=\frac{1}{75}$ oder $17x-5y=1$;

3. $\frac{x}{15}-\frac{y}{17}=\frac{1}{255}$ oder $17x-15y=1$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

3. Aufgabe. Heis, 11. Jemand will einem Kaufmanne eine Schuld von 17 Thlr. 8 Sgr. bezahlen. Der Erste hat nur Friedrichsd'or zu 5 Thlr. 20 Sgr., der Andere nur französische Kronenthaler zu 1 Thlr. 17 Sgr. Wie viele Friedrichsd'or hat der Erste dem Zweiten zu zahlen und wie viele Kronenthaler hat der Zweite dem Ersten zurück zu geben?

Hat der Erste x Friedrichs'dor zu zahlen und der Zweite y Kronenthaler zurück zu geben, so erhält man, wenn sämmtliche Angaben in Silbergroschen verwandelt werden, die Gleichung $170x - 47y = 518$.

4. Aufgabe. Heis, 13. Die Zähne eines gezahnten Rades, welches mit einem andern in Verbindung steht, sind, der Ordnung nach, mit den Zahlen 1 bis 35 bezeichnet; ebenso sind die Zahnlücken des zweiten Rades nacheinander mit 1 bis 47 bezeichnet. Wenn nun der erste Zahn in die erste Zahnlücke eingreift, wie viel Umdrehungen wird jedes der Räder gemacht haben, wenn der erste Zahn des ersten Rades in die achte Zahnlücke des zweiten Rades eingreift?

Wird die Anzahl der Umdrehungen des ersten Rades mit x und die des zweiten Rades mit y bezeichnet, so ist das erste Rad um $35x$ Zähne und das zweite um $47y$ Zahnlücken fortgerückt. Da nun das erste Rad in die achte Zahnlücke eingreifen soll, also in 7 Zahnlücken schon eingegriffen haben muß, so soll es durch seine Anzahl Umdrehungen im Ganzen in $47y + 7$ Zahnlücken eingegriffen haben. Daher erhält man die Gleichung $35x = 47y + 7$.

5. Aufgabe. Heis, 19. Welche Zahl gibt, durch 3, 5, 7, 11 dividirt, die Reste 1, 4, 1, 9?

Nach den in der Aufgabe vorgeschriebenen Bedingungen soll die gesuchte Zahl von der Form $3x + 1$, $7y + 1$, $5z + 4$, $11u + 9$ sein. Da sie die Form $3x + 1$ und $7y + 1$ hat, so muß $3x = 7y$ sein oder sie muß die Form $21x + 1$ haben. Demnach erhält man zur Bestimmung der Zahlen die Gleichungen:

$$1.\ 21x + 1 = 5z + 4 \text{ und}$$
$$2.\ 5z + 4 = 11u + 9.$$

6. Aufgabe. Heis, 22. Unter goldner Zahl eines Jahres versteht man den Rest, den die um 1 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 19 übrig läßt; unter Sonnenzirkel versteht man den Rest, den die um 9 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 28 übrig läßt und unter Römerzinszahl den Rest, den die um 3 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 15 übrig läßt. Welches Jahr hat zur goldnen Zahl 14, zum Sonnenzirkel 26 und zur Römerzinszahl 10?

Läßt die um 1, 9, 3 vermehrte Jahreszahl bei der Division mit 19, 28, 15 die Reste 14, 26, 10, so muß sie selbst die Form $19x + 13$, $28y + 17$, $15z + 7$ haben. Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} 1.\ 19x + 13 = 28y + 17 & \multirow{2}{*}{oder} \\ 2.\ 19x + 13 = 15z + 7 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 19x - 28y = 4 \\ 15z - 19x = 6. \end{array}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

7. Aufgabe. Heis, 25. Eine Bäuerin hat Gänse, Hühner, Enten und Tauben, zusammen 76 Stück, verkauft, eine Gans für 20, ein Huhn für $10^1/_2$, eine Ente für 7 und eine Taube für 4 Silbergroschen und insgesammt 23 Thlr. 17 Sgr. daraus gelöst. Wie viel Stück hat sie von jeder Gattung?

Wird die Anzahl der Gänse, Hühner, Enten und Tauben mit x, y, z, u bezeichnet, so ist nach der Aufgabe die erste Gleichung für die Summe:

1. $x + y + z + u = 76,$

die für den Gesammtpreis

2. $20x + 10^1/_2 y + 7z + 4u = 707.$

Wird aus den beiden Gleichungen u eliminirt, so erhält man

3. $32x + 13y + 6z = 806.$

Setzt man in dieser Gleichung vorläufig x irgend einer positiven Zahl m gleich, so erhält man für y und z die Gleichung

4. $6z + 13y = 806 - 32m$

und aus ihr

5. $y = \quad 2 - 2m - \quad 6w = \quad 2 - 2m + \quad 6w,$

6. $z = 130 - \quad m + 13w = 130 - (m + 13w).$

Setzt man in Gleichung 1 die für x, y, z bestimmten Werthe, so erhält man

7. $u = 2m - 7w - 56 \quad = 2m + 7w - 56$ *).

Wenn alle Zahlen, wie es die Aufgabe fordert, positive ganze Zahlen sein sollen, so muß nach Gleichung 3

1. $x < 25$

oder x darf höchstens 24 sein. Aus Gleichung 5, 6, 7 folgt, daß

2. $m - \quad 3w < 1$
3. $m + 13w < 130,$
4. $2m + \quad 7w > 56,$

sein muß. Aus den Bedingungen $m + 13w < 130$ und $m < 25$ folgt, daß w höchstens 9 sein kann.

Den Werthen für $w = 9$ entsprechen 12 verschiedene Werthe für x, y, z, u von $x = 1$ bis $x = 12$.

Den Werthen für $w = 8$ entsprechen 24 verschiedene Werthe für x, y, z, u von $x = 1$ bis $x = 24$.

Den Werthen für $w = 7$ entsprechen 18 Werthe von $x = 4$ bis $x = 21$. Warum darf nicht x oder $m = 3$ gesetzt werden?

Den Werthen für $w = 6$ entsprechen 11 verschiedene Werthe von $x = 8$ bis $x = 18$.

Endlich den Werthen für $w = 5$ entsprechen 5 verschiedene Werthe von $x = 11$ bis $x = 15$. Warum darf w nicht $= 4$, 3 u. s. w. gesetzt werden?

Im Ganzen ergeben sich 70 Werthe in ganzen Zahlen für x, y, z, u, die der Anfänger gut thut, in einer Tabelle sich zusammenzustellen. —

---

*) Die Vorzeichen von w sind umgekehrt, damit auch w positiv genommen werden kann.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

§. 76.

Von den unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades.

1. Bei den unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades wird in der Regel nur vorausgesetzt, daß gegebene und gesuchte Zahlen rational, selten, daß sie auch ganze Zahlen sind. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen bietet, bei der großen Mannigfaltigkeit der hieher gehörigen Aufgaben, so große Schwierigkeiten dar, daß sie die Grenzen der Elementararithmetik überschreitet und einen besondern Theil der höhern Mathematik bildet, den man gewöhnlich mit dem Namen: Theorie der Zahlen zu benennen pflegt.

2. Die allgemeine Form einer Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten ist: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Unter a, b, c u. s. w. werden hier nur rationale ganze oder gebrochene Zahlen verstanden. Da von den 6 Gliedern schon 2 oder 3 genügen, um eine unbestimmte Gleichung des zweiten Grades zu bilden, so ergeben sich eine Menge verschiedener Grundaufgaben, die zwar alle als Specialisirungen der allgemeinen Form erscheinen und deren Speciallösungen sich aus der allgemeinen Lösung ergeben müssen, die aber auch häufig durch besondere, ihnen allein eigenthümliche Lösungen auf eine viel leichtere Weise gefunden werden können.

3. Wird die allgemeine Form der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ nach x geordnet und aufgelöst, so ergibt sich für x die Endgleichung

$$x = -\frac{by+d}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{by+d}{2a}\right)^2 - \frac{cy^2+ey+f}{a}} \quad \text{oder}$$

$$2ax + by + d = \pm\sqrt{(b^2-4ac)y^2 + (2bd-4ae)y + (d^2-4af)}.$$

Setzt man in ihr $b^2 - 4ac = \alpha$, $2bd - 4ae = \beta$ und $d^2 - 4af = \gamma$, so erhält man $2ax + by + d = \pm\sqrt{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}$.

Soll einem rationalen Werthe von x ein zugehöriger rationaler Werth von y entsprechen, so muß $\sqrt{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}$ ein rationaler Ausdruck oder ein vollständiges Quadrat sein. Wird zu diesem Zwecke $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = t^2$ gesetzt, so wird $y = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{t^2-\gamma}{\alpha}}$ oder

$2\alpha y + \beta = \pm\sqrt{\beta^2 + 4\alpha t^2 - 4\alpha\gamma)}$ oder noch mehr vereinfacht $2\alpha y + \beta = \pm\sqrt{At^2 + B}$, wenn $4\alpha = A$ und $\beta^2 - 4\alpha\gamma = B$ gesetzt wird.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

In diesem Ausdruck wird y rational sein, sobald $At^2 + B$ ein vollständiges Quadrat $= w^2$ ist. Dann werden x und y durch die beiden Gleichungen des ersten Grades:

$$2ax + by + d = t \text{ und}$$
$$2\alpha y + \quad \beta \quad = w$$

bestimmt.

Da die allgemeine Lösung der Gleichung $w = \sqrt{At^2 + B}$, von der die Lösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades abhängig ist, mit großen Schwierigkeiten verbunden ist, so wollen wir uns nur mit der Lösung einiger speciellen Aufgaben befassen, in denen entweder gar kein Wurzelzeichen vorkommt oder A und B vollkommene Quadrate sind, um an ihnen die verschiedenen Hilfsmittel zu zeigen, deren man sich zur Lösung solcher Aufgaben bedient. —

§. 77.

Unbestimmte Aufgaben des zweiten Grades.

1. Aufgabe. Zwei Zahlen zu suchen, deren Product und Summe einer gegebenen ganzen Zahl gleich ist. Sind die gesuchten Zahlen x und y und die gegebene Zahl a, so ist die Gleichung $xy + x + y = a$. Wird diese Gleichung für y aufgelöst, so erhält man $y = \frac{a - x}{x + 1}$ und nach vollzogener Division $y = -1 + \frac{a+1}{x+1}$. Soll nun y eine ganze Zahl sein, so muß $\frac{a+1}{x+1}$ eine ganze Zahl sein oder $x+1$ muß ein Theiler von $a+1$ sein. So viele Theiler demnach $a+1$ hat, ebensoviele Werthe findet man für x und y. — Wie wird die Lösung der allgemeinen Aufgabe $xy + ax + by = c$ lauten?

2. Aufgabe. $xy + x^2 = 2x + 3y + 29$. Löst man die Gleichung für y auf, so erhält man $y = \frac{2x - x^2 + 29}{x - 3} = -x - 1 + \frac{26}{x-3}$ also muß $x - 3$ ein Theiler von 26 sein u. s. w.

Aufgaben über die Rationalmachung von Formeln.

3. Aufgabe. Welchen Werth muß x haben, damit $\sqrt{a + bx}$ rational wird?

Setzt man $a + bx = y^2$, so ist $x = \frac{y^2 - a}{b}$. Welchen Werth man nun auch für y setzen mag, immer wird $a + bx$ rational.

4. Aufgabe. Heis, §. 79, 32. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, daß wenn man entweder 1 zu derselben addirt oder auch 1 davon subtrahirt, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Ist die gesuchte Zahl x, so soll $x+1$ und $x-1$ ein Quadrat sein. Setzt man daher $x+1=p^2$, so ist $x=p^2-1$ und $x-1=p^2-2$, welcher Ausdruck auch ein Quadrat sein muß. Wird seine Wurzel $=p-q$ gesetzt, so wird $p^2-2=p^2-2pq+q^2$ und daher $p=\frac{q^2+2}{2q}$ sein; daher $x=p^2-1=\left(\frac{q^2+2}{2q}\right)^2-1=\frac{q^4+4}{4q^2}$ sein, welchen Werth man auch für q setzen mag. Setzt man $q=\frac{r}{s}$, so wird $x=\frac{r^4+4s^4}{4r^2s^2}$.

5. Aufgabe. Heis, §. 79, 33. Einen Bruch x von solcher Beschaffenheit zu suchen, daß wenn man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt. —

Da $1+x$ und $1-x$ Quadrate sein sollen, so setze man $1+x=p^2$, dann ist $x=p^2-1$ und $1-x=2-p^2$, welches auch ein Quadrat sein soll. Setzt man $p=1-q$, so wird $x=(1-q)^2-1=q^2-2q$ und $2-p^2=1-(q^2-2q)=1+2q-q^2$. Setzt man die Wurzel dieses Ausdruckes $=1-nq$, worin n ein ächter Bruch ist, so wird $1+2q-q^2=1-2qn+q^2n^2$ und $q=\frac{2(n+1)}{n^2+1}$; $x=q^2-2q=\left(\frac{2(n+1)}{n^2+1}\right)^2-\frac{4(n+1)}{n^2+1}=\frac{(1-n^2)4n}{(n^2+1)^2}$. Weil n nun ein Bruch sein muß, so setze man $n=\frac{t}{u}$, so ist $x=\frac{4tu^3-4t^3u}{(t^2+u^2)^2}=\frac{4tu(u^2-t^2)}{(t^2+u^2)^2}$.

6. Aufgabe. Heis, §. 79, 34. Drei Zahlen anzugeben, so daß die Summe der Quadrate der beiden ersten dem Quadrate der dritten Zahl gleich ist.

Bezeichnet man die 3 gesuchten Zahlen mit x, y und z, so soll $x^2+y^2=z^2$ oder $y^2=z^2-x^2$ sein. Setzt man nun $y=2nm$, so ist $4m^2n^2=z^2-x^2$ $=(z+x)(z-x)$. Setzt man nun $2m^2=z+x$ und $2n^2=z-x$, so wird $z=p^2+q^2$ und $x=p^2-q^2$. —

Die obenangeführte Lösung ist eine der einfachsten. Wie läßt sich aus dem Satze, daß $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$ ist, eine andere Auflösung ableiten? Wie läßt sich eine andere Lösung aus der Aufgabe, $\sqrt{1+x^2}$ rational zu machen, herleiten?

7. Aufgabe. Die beiden Gleichungen

$$x^2+y^2-1=u^2$$
$$x^2-y^2-1=v^2$$

in rationalen Zahlen zu lösen.

Wird die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt, so ist $2y^2=u^2-v^2$. Setzt man nun $y=pq$, so wird $u^2-v^2=(u+v)(u-v)=2p^2q^2$. Man kann daher $u+v=2p^2$ und $u-v=q^2$ setzen. Aus diesen Gleichungen erhält man $u=\frac{2p^2+q^2}{2}$; $v=\frac{2p^2-q^2}{2}$. Führen wir diese Werthe von y, u, v in die erste der beiden Gleichungen ein, so wird die-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

selbe $x^2 + p^2q^2 - 1 = \left(\frac{2p^2 + q^2}{2}\right)^2$ woraus sich $x^2 = \frac{q^4 + 4p^4 + 4}{4}$ ergibt. Damit nun x rational werde, muß $4p^4 = 4q^2$ oder $q = p^2$ sein, denn dann ist $x^2 = \frac{p^8 + 4p^4 + 4}{4} = \left(\frac{p^4 + 2}{2}\right)^2$ und $x = \frac{p^4+2}{2} = 1 + \frac{p^4}{2}$. Aus dem Werthe für x erhält man auch die Werthe für y, u, v und zwar $y = p^3$; $u = p^2 + \frac{p^4}{2}$; $v = p^2 - \frac{p^4}{2}$. Welche Werthe müssen für p gesetzt werden, um ganze rationale Zahlen zu erhalten?

8. Aufgabe. Heis, §. 79, 35. Die Summe zweier Quadrate in die Summe zweier andern zu verwandeln.

Da nach der Aufgabe $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ sein soll, so muß wenn $a \gtrless x$ ist, $b \lessgtr y$ sein. Man setze $x = a + pz$ und $y = b - qz$, so ist $a^2 + 2apz + a^2z^2 + b^2 - 2bqz + q^2z^2 = a^2 + b^2$. Hieraus läßt sich z, x und y bestimmen.

9. Aufgabe. Heis, §. 79, 41. Zwei Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß ihre Summe gleich der Summe (Differenz) ihrer Kubikzahlen ist.

Da beide Zahlen nur Brüche sein können, so setze man $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x^3}{z^3} + \frac{y^3}{z^3}$ oder $\frac{x+y}{z} = \frac{x^3 + y^3}{z^3}$. Wird auf beiden Seiten mit z^3 multiplicirt und mit $x+y$ dividirt, so erhält man $z^2 = x^2 - xy + y^2$ und die Aufgabe ist auf die andere, den Ausdruck $\sqrt{x^2 - xy + y^2}$ rational zu machen, reducirt.

Oder: Man dividire beide Seiten der Gleichung $x + y = x^3 + y^3$ durch $x + y$ und löse die Gleichung $1 = x^2 - xy + y^2$ für y auf, so ist $y = \frac{x}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}$. Soll demnach y rational sein, so muß $\sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}$ rational sein. Man setze $\sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2} = 1 - \frac{m}{n}x$ und bestimme x u. s. w.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Fünfter Abschnitt.

Arithmetische und geometrische Reihen.

§. 78.

Von den Reihen im Allgemeinen.

1. Jede Folge von Größen, die nach einem und demselben Gesetze gebildet sind, bildet eine Progression oder Reihe.

Beispiele: $1, 2, 3, 4 \ldots; 1, 3, 5, 7 \ldots; 1, 4, 9, 16, 25 \ldots n^2$
$1, x, x^2, x^3 \ldots . x^n; (a+b); (a+b)^2; (a+b)^3 \ldots .$

2. Die einzelnen Größenausdrücke einer Reihe heißen Glieder (termini) derselben. Zeiger (Stellenzahl, index) heißt die Zahl, welche die Stelle eines jeden Gliedes in der Reihe bezeichnet. Die Glieder werden von links nach rechts gezählt und die Stellenzahl des Anfangsgliedes mit 0 oder 1 bezeichnet, je nachdem die eine oder andere Bezeichnungsart für die Ableitung der Formeln größere Erleichterung verschafft.

Allgemeines Glied (terminus generalis) heißt die Formel, nach der jedes bestimmte Glied in einer Reihe gefunden werden kann; summatarisches Glied oder Summenformel heißt die Formel, nach der die Summe jeder Reihe gefunden wird. —

4. Steigend oder fallend heißt eine Reihe, je nachdem die Glieder wachsen oder abnehmen, oder je nachdem die Glieder nach steigenden oder fallenden Potenzen einer und derselben Hauptgröße gebildet sind.

5. Endlich oder unendlich ist eine Reihe, je nachdem sie aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern besteht. Unendliche Reihen heißen convergent oder divergent, je nachdem sich ihre Summe einer bestimmten endlichen Grenze nähert oder nicht, je mehr Glieder in ihr vereinigt werden. Eine unendliche Reihe kann nur dann convergiren, wenn ihre Glieder von irgend einem Gliede an ununterbrochen abnehmen, aber nicht jede Reihe, in der die Glieder fortwährend abnehmen, ist darum schon eine convergente Reihe. —

Convergent, wie wir sehen werden, ist die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ u. s. w. und ihre Summe $= 1$; divergent dagegen ist die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ u. s. w.,

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

und ihre Summe unendlich groß, obgleich die Glieder in ihr fortwährend abnehmen. Das Warum kann der Anfänger sich auf sehr verschiedene Weise anschaulich machen. —

6. Nach der Verschiedenheit des Gesetzes, nach dem die Glieder einer Reihe gebildet werden, unterscheidet man verschiedene Arten von Reihen. Die Elementararithmetik betrachtet von den Reihen nur die arithmetische und geometrische Reihe und sucht in Bezug auf sie besonders folgende Aufgaben zu lösen: Reihen zu bilden, jedes Glied in ihnen unmittelbar zu bestimmen, ihre Summe zu finden und Glieder zwischen gegebenen Gliedern einzuschalten, so daß sie mit den gegebenen Gliedern eine Reihe derselben Art bilden.

§. 79.

Von der arithmetischen Reihe.

1. Diejenige Reihe heißt eine arithmetische (progression par différence), in der jedes folgende Glied sich aus dem vorhergehenden durch Addition einer und derselben Zahl (Differenz) oder eines und desselben Größenausdrucks gebildet hat. Wird das erste Glied mit a und die Differenz mit d bezeichnet, so ist die allgemeine Form der arithmetischen Reihe:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d} \ldots\ldots \overset{n-1}{a+(n-2)d} + \overset{n}{a+(n-1)d}.$$

Unter a und d kann man sich jede beliebige Zahl und jeden beliebigen Größenausdruck denken. Ist d positiv, so wird die Reihe steigend, ist d negativ, so wird sie fallend (Beispiele).

2. Die arithmetische Reihe wird gebildet, indem zu dem Anfangs- und jedem folgenden Gliede die Differenz wiederholt addirt wird.

3. Das allgemeine oder $n$te Glied (t) ergibt sich unmittelbar aus der allgemeinen Form der Reihe.

$$1.\quad t = a + (n-1)d.$$

Wie wird die Formel in Worten ausgedrückt? Wie wird die Formel heißen, wenn die Stellenzahl des Anfangsgliedes nicht 1 sondern 0 ist?

4. Die Summe jeder arithmetischen Reihe ist dem Producte aus der halben Anzahl der Glieder, multiplicirt mit der Summe des ersten und letzten Gliedes, gleich.

$$2.\quad s = (a+t)\frac{n}{2}.$$

Denn addirt man zu der allgemeinen Form der arithmetischen Reihe

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) \ldots (t - 2d) + (t - d) + t = s$$

dieselbe in umgekehrter Folge

$$t + (t - d) + (t - 2d) + (t - 3d) \ldots (a + 2d) + (a + d) + a = s$$

so erhält man $(a+t) + (a+t) + (a+t) \ldots\ldots (a+t) + (a+t) = 2s$

oder $(a + t)n = 2s$

daher $s = (a + t)\dfrac{n}{2}$.

Aus dem Beweise für die Summenformel ergibt sich, daß in jeder arithmetischen Reihe gleichweit vom Anfangs- und Endgliede entfernte Glieder dieselbe Summe geben, nämlich die des ersten und letzten Gliedes. —

5. Werden aus den beiden Gleichungen

1. $t = a + (n - 1)d$

2. $s = (a + t)\dfrac{n}{2}$

die in ihnen zugleich vorkommenden Größen a, n, t eliminirt, so erhält man noch 3 neue Gleichungen

3. $s = \left(2a + (n - 1)d\right)\dfrac{n}{2}$

4. $s = \left(2t + (n - 1)d\right)\dfrac{n}{2}$

5. $s = \dfrac{(t - a + d)(t - a)}{2d}$.

Werden sämmtliche 5 Gleichungen für jede in ihnen vorkommende Größe aufgelöst, so erhält man 20 Formeln für die 20 verschiedenen Grundaufgaben, die in Bezug auf die arithmetische Reihe gestellt werden können. Ordnet man sie nach den gesuchten und nach den gegebenen Größen, so lassen sie sich in folgender Tabelle bequem übersehen.

6. **Formeln** für die arithmetische Reihe:

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Aufg.	Gesucht.	Gegeben.	Formeln.
1	t	$a,\ d,\ n$	$t = a + (n-1)d.$
2	"	$a,\ d,\ s$	$t = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{2ds + (a - \frac{1}{2}d)^2}$
3	"	$a,\ n,\ s$	$t = \frac{2s}{n} - a.$
4	"	$d,\ n,\ s$	$t = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$
5	s	$a,\ d,\ n$	$s = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d).$
6	"	$a,\ d,\ t$	$s = \frac{(a+t)}{2} + \frac{(t+a)(t-a)}{2d}.$
7	"	$a,\ n,\ t$	$s = \frac{1}{2}n(a+t).$
8	"	$d,\ n,\ t$	$s = \frac{1}{2}n(2t - (n-1)d).$
9	d	$a,\ n,\ t$	$d = \frac{t-a}{n-1}.$
10	"	$a,\ n,\ s$	$d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}.$
11	"	$a,\ t,\ s$	$d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s - t - a}.$
12	"	$n,\ t,\ s$	$d = \frac{2nt - 2s}{n(n-1)}.$
13	n	$a,\ d,\ t$	$n = 1 + \frac{t-a}{d}.$
14	"	$a,\ d,\ s$	$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$
15	"	$a,\ t,\ s$	$n = \frac{2s}{a+t}.$
16	"	$d,\ t,\ s$	$n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}}.$
17	a	$d,\ n,\ t$	$a = t - (n-1)d.$
18	"	$d,\ n,\ s$	$a = \frac{s}{n} \; \frac{(n-1)d}{2}.$
19	"	$d,\ t,\ s$	$a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}d\right)^2 - 2ds.}$
20	"	$n,\ t,\ s$	$a = \frac{2s}{n} - t.$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

7. Aus dem $m$ten und $r$ten Gliede die Differenz der Reihe zu finden.

Bezeichnet man die gesuchte Differenz mit x, so ist nach Gleichung 1

$$t_r = a + (r - 1)x$$

und $t_m = a + (m - 1)x$

daher $t_r - t_m = (r - m)x$

und $x = \frac{t_r - t_m}{r - m}$.

Wie lautet die Formel in Worten?

8. Die Differenz für n interpolirte Glieder zu finden und das $k$te Glied zu berechnen.

Bezeichnet man die gesuchte Differenz mit x und das $k$te Glied mit y, so ist, wenn a und b die gegebenen Glieder sind, zwischen denen interpolirt werden soll, und a_1, a_2, a_3 ... die interpolirten Glieder:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + x \\ a_2 &= a + 2x \\ \ldots &= \ldots \\ \ldots &= \ldots \\ a_n &= a + nx \\ a_{n+1} &= a + (n+1)x = b \end{aligned}$$

daher $a + (n+1)x = b$

und $x = \frac{b - a}{n + 1}$

$$y = a + kx = a + \frac{b-a}{n+1} \cdot k.$$

Beispiele:

Gegebene Reihe:	3,				15,				27,				39.
Interpolirte Reihen:	3,		7,	11,	15,	19,		23,	27,	31,		35,	39.
	3,	6,	9,	12,	15,	18,	21,	24,	27,	30,	33,	36,	39.

§. 80.

Erklärung einiger Aufgaben über arithmetische Reihen, und Bildung der zu ihrer Lösung nöthigen Gleichungen.

1. Aufgabe. Heis, §. 82, 3. Es setzt Jemand einen Gulden in die Lotterie und weil er nicht gewinnt, so setzt er das zweite Mal zwei Gulden und so fort immer einen Gulden mehr. Wenn nun die Lotterie den Einsatz des Gewinnenden 14fach bezahlt, so fragt es sich, bei welchem Spiele er all sein ausgelegtes Geld durch einen einzigen Treffer zurückerhält.

Bezeichnet man die Zahl des Spieles, bei dem dies der Fall ist, mit x, so hat der Spieler bei dem letzten Spiele x Gulden und also im Ganzen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$(1 + x)\frac{x}{2}$ Gulden eingesetzt (§. 79 Gleichung 2). Da nun dieser ganze Einsatz dem 14fachen des letzten Einsatzes gleich sein soll, so ist, $(1 + x)\frac{x}{2} = 14x$.

2. Aufgabe. Heis, §. 82, 10. Von zwei Städten, welche um 165 Meilen von einander entfernt sind, brechen gleichzeitig A und B gegen einander auf, um sich zu begegnen. A macht den ersten Tag 1 Meile, den zweiten Tag 2 Meilen u. s. w. B legt den ersten Tag 20, den zweiten 18 u. s. w. zurück. Wann werden sie sich begegnen?

Nach der Aufgabe ist die Anzahl der Glieder zweier Reihen zu suchen, deren beide Summen zusammen 165 betragen und deren Anfangsglieder und Differenzen gegeben sind. Die zur Lösung führende Gleichung ist: $x^2 - 43x = -330$.

3. Aufgabe. Heis, §. 82, 11. Unter 28 Soldaten, die eine Schanze zuerst erstürmt haben, soll eine Summe Geldes so vertheilt werden, daß jeder folgende immer gleichviel weniger erhält, als der vorhergehende und es erhalten der fünfte und der zwölfte Mann zusammen 10 Thlr. und der sechzehnte und der siebente zusammen 9 Thaler. Wie viel erhält jeder von diesen besonders und wie groß ist die unter die 28 Mann vertheilte Summe?

Bezeichnet man das Anfangsglied der in der Aufgabe vorliegenden Reihe mit x und ihre Differenz mit y, so erhält der fünfte Mann $x + 4y$ und der zwölfte Mann $x + 11y$ Thaler. Da nun beide zusammen 10 Thlr. erhalten, so ist die Gleichung

$$x + 4y + x + 11y = 10 \text{ oder}$$

1. $2x + 15y = 10$. Ebenso erhält man
2. $2x + 21y = 9$.

4. Aufgabe. Heis, §. 82, 14. Wenn in der Gleichung $ax + b = y$, für x nach und nach die Werthe c, $c + d$, $c + 2d$ u. s. w., die eine arithmetische Reihe bilden, gesetzt werden, so bilden die hieraus sich ergebenden Werthe für y ebenfalls eine arithmetische Reihe. Warum? Wie heißt die Differenz dieser Reihe? —

Wird das $n$te Glied der Werthe von y mit y_n und das $(n - 1)$te Glied mit y_{n-1} bezeichnet, so ist nach der Aufgabe

$$y_n = a(c + (n - 1)d + b$$
$$y_{n-1} = a(c + (n - 2)d + b.$$

Daher der Unterschied zwischen dem $n$ten und $(n - 1)$ Werthe oder $y_n - y_{n-1} = ad$. Da nun unter n und $(n - 1)$ jede beliebige zwei benachbarte Zahlen gedacht werden können, deren entsprechende Differenzen von y immer ad sind, so bilden die Werthe von y eine arithmetische Reihe mit der Differenz ad. —

5. Aufgabe. Heis, §. 82, 17. Die Kuben der natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung, d. h. eine Reihe, deren dritte Differenzen gleich und $= 2 . 3 = 6$ sind. —

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Natürliche Zahlenreihe:	1	2	3	4	5	6	7
Kubikzahlen:	1	8	27	64	125	216	343
Erste Differenzen:		7	19	37	61	91	127
Zweite Differenzen:			12	18	24	30	36
Dritte Differenzen:				6	6	6	6.

Beweis: Sämmtliche Zahlen erscheinen unter den vier Formen $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$. Bildet man ihre Kuben, sowie die ersten, zweiten und dritten Differenzen, so erhält man:

Zahlen.	Kuben.	Erste Differenzen.	Zweite Differenz.	Dritte Differenz.
$4n$	$64n^3$			
$4n+1$	$64n^3+48n^2+12n+1$	$48n^2+12n+1$		
$4n+2$	$64n^3+96n^2+48n+8$	$48n^2+36n+7$	$24n+6$	6.
$4n+3$	$64n^3+144n^2+108n+27$	$48n^2+60n+19$	$24n+12$	

welche vier auf einander folgende Zahlen man wählen mag. Auf eine ähnliche Weise läßt sich der Satz beweisen, daß die Biquadratzahlen eine arithmetische Reihe der vierten Ordnung bilden. Bilden die $m$ten Potenzen der natürlichen Zahlen auch eine arithmetische Reihe der $m$ten Ordnung? Wie werden, wenn dies Gesetz allgemeine Gültigkeit hat, sich die gleichen Differenzen der Reihen bestimmen lassen, da die gleichen Differenzen der Kubikzahlenreihe $= 1 . 2 . 3 = 6$ ist?

6. Lehrsatz und Aufgabe. Heis, §. 82, 21 und 22. Die dreifache Summe der Quadratzahlen ist der Summe der natürlichen Zahlen *plus* dem Quadrate und Kubus der letzten Zahl gleich.

Formel: $3(1^2+2^2+3^2+4^2 \ldots\ldots n^2)=1+2+3+4 \ldots\ldots n+n^2+n^3$.

Beweis: Ist die Formel, wie sie hier für n Glieder angedeutet, wirklich richtig, so muß sie auch richtig bleiben, wenn nach diesem Gesetze auf beiden Seiten ein Glied hinzukommt. Addirt man demnach $3(n+1)^2$ auf der linken Seite und dem entsprechend die für diesen Ausdruck hinzukommenden Glieder auf der rechten Seite, so erhält man, wenn man passend zerlegt und ordnet

$$\begin{array}{rl} 3(1^2+2^2+3^2 \ldots\ldots+n^2)=1+\;2+3\ldots & +n+n^2+\;n^3 \\ +3(n+1)^2=3n^2+6n+3= & \left\{\begin{array}{r} +n+1+2n+3n^2 \\ +\;1\;+3n \\ +1. \end{array}\right. \\ \hline \end{array}$$

$$3(1^2+2^2+3^2 \ldots\ldots+n^2+(n+1)^2)=1+2+3\ldots n+(n+1)+(n+1)^2 \\ +(n+1)^3.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Hieraus ergibt sich die Summenformel Sn^2 sehr leicht.

Denn $3\ Sn^2 = (1+2+3+\ldots n)+n^2+n^3$

$$= (1+n)\frac{n}{2} + n^2 + n^3$$

$$= \frac{n+n^2+2n^2+2n^3}{2} = \frac{n+3n^2+2n^3}{2}$$

$$= \frac{n(1+3n+2n^2)}{2} = \frac{n\,.\,(n+1)(2n+1)}{2}.$$

§. 81.

Von der geometrischen Reihe.

1. Unter einer geometrischen Reihe (pr. par quotient) versteht man diejenige Reihe, in der jedes Glied sich aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit einer und derselben Größe gebildet hat. Bezeichnet man das Anfangsglied mit a, den beständigen Factor oder den Exponenten der Reihe mit e, so ist die allgemeine Form der geometrischen Reihe

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{ae},\ \overset{3}{ae^2},\ \overset{4}{ae^3}\ \ldots\ ae^{n-2},\ ae^{n-1}.$$

Ist e eine ganze Zahl oder ein unächter Bruch, so wird die Reihe steigend, ist dagegen e ein ächter Bruch, so wird sie fallend. Ist e negativ, so haben die Glieder abwechselnde Vorzeichen.

2. Ist Anfangsglied und Exponent der geometrischen Reihe gegeben, so erhält man die Reihe, wenn man jedes vorhergehende Glied mit dem Exponenten multiplicirt.

3. Aus der allgemeinen Form für die geometrische Reihe ergibt sich unmittelbar auch die Formel, nach der jedes Glied der Reihe gefunden werden kann:

1. $t = a\,.\,e^{n-1}$.

Wie lautet die Formel in Worten? Wie würden sie in Zeichen und Worten auszudrücken sein, wenn die Stellenzahlen der Glieder nicht von 1, sondern von 0 an gezählt würden?

4. Um die Summenformel der geometrischen Reihe zu finden, multiplicire man die Reihe mit e, so erhält man

$$\begin{aligned} es &= \quad\ ae+ae^2+ae^3\ldots\ldots+t+et. \\ s &= a+ae+ae^2+ae^3\ldots\ldots+t \end{aligned}$$

Zieht man hievon die einfache Reihe ab, so erhält man

$$es - s = et - a$$

$$(e-1)s = et - a$$

2. $s = \dfrac{et-a}{e-1} = \dfrac{a-et}{1-e}$.

Wie lautet die Summenformel in Worten?

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

5. Werden aus den beiden Gleichungen die in ihnen gemeinschaftlich vorkommenden Größen a, e, t eliminirt, so erhält man noch drei neue Gleichungen:

$$3.\ s = a \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1} = a \cdot \frac{1 - e^n}{1 - e}$$

$$4.\ s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$5.\ s = \frac{t(e^n - 1)}{(e-1)e^{n-1}}.$$

Werden diese fünf Gleichungen für alle darin vorkommenden Größen aufgelöst oder wenigstens entwickelt und geordnet, so erhält man, wie bei den arithmetischen Reihen, 20 Gleichungen für die 20 Grundaufgaben, die über geometrische Reihen gestellt werden können. Diese Formeln nach den gesuchten und gegebenen Größen geordnet und in eine Tabelle zusammengestellt, sind:

6. **Formeln** für die geometrische Reihe:

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

nr	Gesucht.	Gegeben.	Formeln.
1	t	$a,\ e,\ n$	$t = a e^{n-1}$.
2	"	$a,\ e,\ s$	$t = \frac{a + (e-1)s}{e}$.
3	"	$a,\ n,\ s$	$t(s-t)^{n-1} - a(1-a)^{n-1} = 0$.
4	"	$e,\ n,\ s$	$t = \frac{(e-1)s \,.\, e^{n-1}}{e^n - 1}$.
5	s	$a,\ e,\ n$	$s = \frac{a(e^n - 1)}{(e-1)}$.
6	"	$a,\ e,\ t$	$s = \frac{et - a}{e - 1}$.
7	"	$a,\ n,\ t$	$s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
8	"	$e,\ n,\ t$	$s = \frac{t(e^n - 1)}{(e-1)e^{n-1}}$.
9	a	$e,\ n,\ t$	$a = \frac{t}{e^{n-1}}$.
10	"	$e,\ n,\ s$	$a = \frac{(e-1)s}{e^n - 1}$.
11	"	$e,\ t,\ s$	$a = et - (e-1)s$.
12	"	$n,\ t,\ s$	$a(s-a)^{n-1} - t(s-t)^{n-1} = 0$.
13	e	$a,\ n,\ t$	$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$
14	"	$a,\ n,\ s$	$\frac{e^n - 1}{e - 1} - \frac{s}{a} = 0$.
15	"	$a,\ t,\ s$	$e = \frac{s - a}{s - t}$.
16	"	$n,\ t,\ s$	$\frac{e^n - 1}{e - 1} - \frac{s}{t} e^{n-1} = 0$,
17	n	$a,\ e,\ t$	$n = \frac{\log t - \log a}{\log e} + 1$.
18	"	$a,\ e,\ s$	$n = \frac{\log[a + (e-1)s] - \log a}{\log e}$.
19	"	$a,\ t,\ s$	$n = \frac{\log t - \log a}{\log(s-a) - \log(s-t)} + 1$.
20	"	$e,\ t,\ s$	$n = \frac{\log t - \log(et - (e-1)s)}{\log e} + 1$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

7. Aus dem *m*ten und *r*ten Gliede den Exponenten der Reihe zu finden.

Bezeichnet man den Exponenten mit x, so ist nach Gleichung 1

$$t_r = a \,.\, x^{r-1}$$

$$\text{und } t_m = a \,.\, x^{m-1},$$

$$\text{daher } \frac{t_r}{t_m} = \frac{x^{r-1}}{x^{m-1}} = x^{r-m}$$

$$\text{und } x = \sqrt[r-m]{\frac{t_r}{t_m}}\,.$$

Wie lautet die Formel in Worten?

8. Die Exponenten für n interpolirte Glieder zu finden und das *k*te Glied zu berechnen.

Bezeichnet man den gesuchten Exponenten mit x und das *k*te Glied mit y, so ist, wenn a und b die beiden gegebenen Glieder sind, zwischen denen interpolirt werden soll und a_1, a_2, a_3 ... die interpolirten Glieder:

$$\begin{aligned} a_1 &= ax \\ a_2 &= ax^2 \\ a_3 &= ax^3 \\ \ldots &= \ldots \\ \ldots &= \ldots \\ a_n &= ax^n \\ a_{n+1} &= ax^{n+1} = b, \end{aligned}$$

$$\text{daher } a \,.\, x^{n+1} = b$$

$$\text{und } x = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

$$y = a \,.\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^k = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n+1}}.$$

Welche Analogie findet sich zwischen den Formeln der geometrischen und arithmetischen Reihe?

9. Die Summenformel einer unendlichen geometrischen Reihe zu bilden, deren Exponent ein ächter Bruch ist. —

Wird in der Summenformel $s = a \,.\, \frac{e^n - 1}{e - 1}$ des vorigen §. e ein ächter Bruch und $n = \infty$, so geht sie in

$$a \,.\, \frac{1 - e^\infty}{1 - e} = \frac{a}{1 - e} - \frac{a}{1 - e}\, e^\infty$$

über. Da nun, wenn e ein ächter Bruch ist, e^n immer kleiner wird, je größer n wird, so wird e^n unendlich klein, wenn $n = \infty$ wird. Der zweite

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Theil der Summenformel wird daher gleichfalls unendlich klein oder $= 0$ im Verhältniß zu jeder endlichen Größe und hier zu $\frac{a}{1 - e}$; daher wird die Summenformel in diesem Falle $s = \frac{a}{1 - e}$.

Die geometrischen unendlichen Reihen, deren Exponenten ächte Brüche sind, bilden daher convergente Reihen, deren Summe einem endlichen Größenausdrucke gleich ist; sie dienen daher in der Analysis dazu, um durch Vergleichung mit ihnen über die Convergenz anderer Reihen urtheilen zu können. —

Fragen: Was wird aus der Summenformel $S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ wenn $q = 1$ wird? Woher rührt die Unbestimmtheit und wie wird sie gehoben und der richtige Werth der Formel bestimmt? Welche Anfangsglieder und Exponenten haben die reinen und gemischten periodischen Decimalbrüche, wenn sie als convergente unendliche geometrische Reihen betrachtet werden? Sind auch noch andere systematische Brüche außer den Decimalbrüchen denkbar und wie werden sie genannt? Wie wird ein gemeiner Bruch in eine Kettenreihe mit vorgeschiebener Basis verwandelt und auf welchen einfachen Satz stützt sich diese Verwandlung? Ist diese Verwandlung im Wesentlichen von der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch verschieden? Was für Producte erhält man, wenn alle Glieder einer arithmetischen oder geometrischen Reihe statt addirt multiplicirt werden?

§. 82.

Erklärung einiger Aufgaben über geometrische Reihen, und Bildung der zu ihrer Lösung nöthigen Gleichungen.

1. Aufgabe. Heis, §. 83, 34. In einer geometrischen Progression von vier Gliedern ist die Summe aller Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$. Welche Progression ist es?

Wenn s die halbe Summe und d die halbe Differenz der mittleren Glieder bezeichnet, so ist $s - d$ das zweite und $s + d$ das dritte Glied. Quadrirt man das zweite Glied $(s - d)$ und dividirt das Quadrat durch das dritte Glied, so erhält man das erste Glied $= \frac{(s - d)^2}{s + d}$. Quadrirt man das dritte Glied $s + d$ und dividirt sein Quadrat durch das zweite Glied, so erhält man das vierte Glied $\frac{(s + d)^2}{s - d}$. Demnach ist

$$1. \quad \frac{(s - d)^2}{s + d} + (s - d) + (s + d) + \frac{(s + d)^2}{s - d} = a.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Hieraus ergibt sich 2. $d = s\sqrt{\frac{a - 4s}{a + 4s}}$.

Quadrirt man ferner die einzelnen Glieder, bringt sie unter einen Nenner und addirt sie, so erhält man

$$3. \quad \frac{4s^6 + 28s^4d^2 + 28s^2d^4 + 4d^6}{(s^2 - d^2)^2} = b.$$

Substituirt man in sie den gefundenen Werth für d, so erhält man $s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 2a^2(a^2 - b)}}{4a}$. Substituirt man endlich diese für s und d gefundenen Werthe in die Progression $\frac{(s-d)^2}{s+d} : s - d = s + d : \frac{(s+d)^2}{s-d}$ so erhält man die verlangte Progression.

Aufgabe 2. Heis, §. 83. 36. Zwischen a und b sollen drei mittlere Proportionalen eingeschaltet werden.

Nach §. 82, 8 hat man für den Exponenten der Interpolation $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$ für das erste Glied $a\sqrt[4]{\frac{b}{a}} = \sqrt[4]{a^3b}$, für das zweite Glied $a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^2 = \sqrt{ab}$ und für das dritte Glied $a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^3 = \sqrt[4]{ab^3}$.

Aufgabe 3. Heis, §. 84. 3. Ein Spieler nahm sich vor, jedesmal den doppelten Einsatz zu wagen, wenn ihm das Glück ungünstig sei, dagegen nur jedesmal die Hälfte des vorhergehenden Einsatzes zu wagen, wenn ihm das Glück günstig sei. Zuerst verliert er achtmal, dann gewinnt er fünfmal hintereinander und zwar jedesmal das 12fache seines Einsatzes. Da er dem Glücke nicht weiter traut, so geht er mit seinem Gewinne von $949\frac{1}{2}$ Gulden nach Hause. Wie viel setzte er zum ersten Male ein?

Wird der Einsatz des Spielers mit x bezeichnet, so hat er nach §. 82 Gleichung 3 im Ganzen die Summe seiner 8 Einsätze $= x \cdot \frac{2^8 - 1}{1} = 255x$ verloren. Da er zum neunten Male $256x$ setzt und fünfmal hintereinander jedesmal die Hälfte des vorigen Satzes, so ist die Summe dieser 5 Einsätze $= 256x \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} = 496x$. Sein Gewinn ist daher $496x \cdot 12 = 5952x$ und die Gleichung für den Unterschied zwischen Gewinn und Verlust

$$5952x - 255x = 949\tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe 4. Heis, §. 84, 9. Eine Linie von gegebener Länge a liegt auf dem einen Schenkel eines Winkels α, und wird auf den zweiten Schenkel projicirt; hierauf wird die Projection auf den ersten Schenkel und alsdann die zweite

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Projection wieder auf den zweiten Schenkel projicirt u. s. w. bis ins Unendliche. Wie groß wird die erste Linie sammt allen ihren Projectionen sein?

Da der Schenkel $= a$ und der Winkel $= \alpha$ ist, so ist die erste Projection $= a \,.\, cos\, \alpha$, die zweite Projection $= (a\, cos\, \alpha)\, cos\, \alpha = a\, cos\, \alpha^2$, die dritte Projection $(a\, cos\, \alpha^2)\, cos\, \alpha = a\, cos\, \alpha^3$ u. s. w., d. h. die Projectionen bilden mit der Linie eine unendliche geometrische Reihe, deren Anfangsglied a und deren Exponent $cos\, \alpha$ ist. Ihre Summe S ist daher $\frac{a}{1 - cos\, \alpha}$ und da nach den Lehren der Trigonometrie $1 - cos\, \alpha = 2\, sin\, {}^1/_2\, \alpha^2$, so ist $S = \frac{a}{2\,.\,sin\, {}^1/_2\, \alpha^2}$.

Aufgabe 5. Heis, §. 84, 12. Zwischen 1 und $^1/_2$ sollen 11 Glieder nach dem Gesetze einer geometrischen Progression eingeschaltet werden. Wie heißen die Glieder?

Da nach §. 82, 8 der Interpolationsexponent $= \sqrt[12]{{}^1/_2}$, so sind die Glieder $(\sqrt[12]{{}^1/_2})^1\, (\sqrt[12]{{}^1/_2})^2\, (\sqrt[12]{{}^1/_2})^3$ u. s. w.

§. 83.

Anwendung der geometrischen Reihen auf die Aufgaben der Zinseszinsen- und Rentenrechnung.

Erklärungen.

1. Werden n Termine lang die Zinsen für ein Capital nicht bezahlt, so kann der Gläubiger am Ende des Zeitraums entweder außer dem Capitale blos die Summe der, durch den ganzen Zeitraum hindurch aufgelaufenen Zinsen zu fordern haben, oder er ist berechtigt, auch von den am Ende eines jeden einzelnen Termins fälligen Zinsen wieder Zinsen zu fordern. Im ersten Falle sagt man, das Capital verzinst sich einfach, im zweiten Falle dagegen, es verzinst sich zu Zins auf Zins.

2. Der Abzug oder der Rabatt, der bei einem erst nach n Zeiteinheiten (Jahren) fälligen Capitale, bei zusammengesetzter Verzinsung, dem Zahlenden zu Gute gerechnet wird, heißt Interusurium. Das Interusurium ist demnach der Unterschied zwischen dem End- und Anfangswerthe eines Capitals.

3. Diejenige Person, die ihr Capital (Mise Einlage) nebst Zinsen am Anfange oder am Ende bestimmter Zeitabschnitte dergestalt zurückerhält, daß sie jedesmal entweder eine sich immer gleichbleibende oder eine sich nach einem bestimmten Gesetze ändernde Summe empfängt, heißt Rentier und die einzelnen Rückzahlungen Renten. Man unterscheidet Zeitrenten und Lebensrenten, jenachdem die Renten am Ende bestimmter Zeitabschnitte oder am Lebensende des Rentiers ausgezahlt werden.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

4. Bei der zusammengesetzten Zinsrechnung werden von den Bruchtheilen der Zeitabschnitte, nach denen die Zinsen zum Capital geschlagen werden, nur die einfachen Zinsen gerechnet, weil man annimmt, daß erst nach einem vollständig abgelaufenen Zeitraume die Zinsen wieder als verzinsliches Capital gelten.

5. Die Sterblichkeitstabellen zeigen an, wie viele Menschen von einer in einem Jahre gegebenen Zahl (1000) Geborener am Ende eines jeden Jahres noch am Leben sind. So leben z. B. von 1000 Geborenen am Ende des vierzigsten Jahres nach den Baumann-Süßmilch'schen Tabellen noch 374. Mit Hülfe solcher Tafeln ist es leicht, die wahrscheinliche Lebensdauer eines Menschen zu bestimmen. Man versteht nämlich unter dieser Dauer die Zeit, nach welcher es ebenso wahrscheinlich ist, daß er noch lebe als daß er nicht mehr lebe. Es wird dies aber alsdann der Fall sein, wenn die Hälfte der Personen jenes Alters gestorben ist. Um z. B. die wahrscheinliche Lebensdauer eines vierzigjährigen Menschen zu bestimmen, gibt die Sterblichkeitstabelle 374. Die Hälfte von 374 = 187 steht bei dem Alter von 63, also ist die wahrscheinliche Lebensdauer eines Menschen von 40 Jahren 63 — 40 = 23.

Aufgaben der zusammengesetzten Zins- und Rentenrechnung.

6. Die Gleichung für den Endwerth eines Capitals bei zusammengesetzter Verzinsung zu finden.

Wird das Capital mit c, die Einheitszinsen mit $\frac{p}{100}$ und die verzinste Einheit mit $1 + \frac{p}{100} = q$ bezeichnet, so ist der Werth des Capitals am

Ende des ersten Jahres	$= c.\left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$= c\,q$
und am Ende des zweiten Jahres	$= (c\,q)\,q$	$= c\,q^2$
„ „ „ „ dritten „	$= c\,q^2\,.\,q$	$= c\,q^3$
„ „ „ „ „ „	= „	= „
„ „ „ „ $n$ten „	$= c\,q^{n-1}\,.\,q$	$= c\,q^n$.

$$\text{Daher 1. } C = c\,q^n = c\,.\left(\frac{100 + p}{100}\right)^n.$$

D. h. der Endwerth des Capitals ist dem Producte des anfänglichen Capitals multiplicirt mit der $n$ten Potenz der verzinseten Einheit gleich.

7. Löset man die in 6 gefundene Gleichung für die darin vorkommenden Größen auf, so erhält man noch drei neue Gleichungen für die anderen drei Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung, nämlich:

$$2.\quad c = \frac{C}{q^n} = C\,.\left(\frac{1}{q}\right)^n = C\,.\left(\frac{100}{100 + p}\right)^n.$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$3.\quad q = \sqrt[n]{\frac{C}{c}} \text{ oder } \frac{100+p}{100} = \sqrt[n]{\frac{C}{c}} \text{ daher } p = 100\sqrt[n]{\frac{C}{c}} - 100$$
$$= \left(\sqrt[n]{\frac{C}{c}} - 1\right) 100.$$

$$4.\quad n = \frac{log\,C - log\,c}{log\,q} = \frac{log\,C - log\,c}{log(100+p) - log\,100} = \frac{log\,C - log\,c}{log(100+p) - 2.}$$

Wie lauten die drei Formeln in Worten? Wie heißen die logarithmirten Formeln für C, c, q?

8. Die Gleichung für den Endwerth eines Capitals zu finden, wenn n eine gemischte Zahl $= n + \frac{r}{s}$ ist, worin $r < s$.

Da nur für die n vollen Jahren die zusammengesetzten Zinsen zu rechnen sind, so erhält man nach 6 für den Endwerth des Capitals am Ende des $n$ten Jahres cq^n, als Capital, das $\frac{r}{s}$ des folgenden Jahres zu einfachen Zinsen zu verzinsen ist. Daher wird es am Ende dieses Zeitraumes

$$= cq^n \cdot \left(1 + \frac{\frac{r}{s}p}{100}\right) = c \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \left(\frac{100\,s + r\,p}{100}\right)$$

9. Die Gleichung für den Endwerth eines Capitals zu finden, dem am Ende eines jeden Jahres eine bestimmte Summe (a) zugelegt oder genommen wird.

Da a Thaler am Ende des ersten Jahres zugelegt oder weggenommen werden, so ist der Werth des Capitales am Ende des ersten Jahres $cq \pm a$. Da sich dies Capital im zweiten Jahre wieder zu demselben Zinsfuße verzinset und sich abermals um a Thaler vermehrt oder vermindert, so ist es am Ende des zweiten Jahres $(cq \pm a)\,q \pm a$. Ebenso am Ende des dritten Jahres $[(cq \pm a)\,q \pm a]\,q \pm a = cq^3 \pm aq^2 \pm aq \pm a$. Am Ende des vierten Jahres $= (cq^3 \pm aq^2 \pm aq \pm a)\,q \pm a = cq^4 \pm aq^3 \pm aq^2 \pm aq \pm a$. Am Ende des $n$ten Jahres ist $C = cq^n \pm aq^{n-1} \pm aq^{n-2} + \ldots \pm aq \pm a$. Sondert man den gemeinschaftlichen Factor a ab, so ist

$$C = cq^n \pm a\,(q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} \;\ldots\; + 1).$$

Da nun der eingeklammerte Factor eine geometrische Reihe ist, deren Anfangsglied 1, deren Exponent q und deren Gliederzahl n ist, so ist ihre Summe $= \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Daher $C = cq^n \pm a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Wie lange muß das Capital stehen, wenn es sich verdoppeln, verdreifachen soll und in welchem Verhältniß muß in diesem Falle a zu den Zinsen stehen, wenn a Thaler am Ende eines jeden Jahres von dem Capitale genommen werden. In welchem Falle wird das Capital zu Null werden und wann?

10. Den heutigen Werth (die Mise) einer $n$mal am Ende eines jeden Jahres zu zahlenden Rente zu finden.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Bezeichnet man den heutigen Werth der Rente mit m, so ist derselbe der Summe aller einzelnen auf den gegenwärtigen Augenblick discontirten Renten (r) gleich. Da nun die für ein Jahr discontirte Einheit $= \frac{100}{100+p} = \frac{1}{q}$ ist, so sind die discontirten Werthe der Renten, die am Ende der einzelnen Jahre zu zahlen sind $\overset{1}{\frac{r}{q}}, \overset{2}{\frac{r}{q^2}}, \overset{3}{\frac{r}{q^3}}, \overset{4}{\frac{r}{q^4}} \ldots \ldots \overset{n}{\frac{r}{q^n}}$. Daher erhält man für m die Gleichung $m = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} \ldots \frac{r}{q^n}$ und aus ihr, nachdem r abgesondert und mit q^n multiplicirt und dividirt ist,

$$m = \frac{r}{q^n}(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots q + 1)$$

$$1. \quad m = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

11. Löset man die in 10 für die Mise gefundene Gleichung für r und n auf, so erhält man noch zwei neue Formeln für die Bestimmung der Größe der Rente und der Zeit, die sie bezogen werden kann, wenn Mise und Zinsfuß gegeben sind.

$$2. \quad r = \frac{m \,.\, q^n (q - 1)}{q^n - 1}.$$

$$3. \quad n = \frac{\log r - \log(r - m(q-1))}{\log q}.$$

Warum wird die Gleichung nicht auch für q aufgelöst?

12. Den baaren Werth einer Jahresrente zu finden, die n Jahre hindurch in arithmetischer Progression steigt.

Durch eine ganz ähnliche Entwicklung wie in 10 findet man

$$m = \frac{r}{q} + \frac{2r}{q^2} + \frac{3r}{q^3} \ldots \ldots \frac{nr}{q^n}.$$

Wird die Gleichung erst mit q^n und dann mit q^{n-1} multiplicirt und die Differenz der Resultate gebildet, so erhält man

$$m q^n - m q^{n-1} = r q^{n-1} + r q^{n-2} + r q^{n-3} \ldots + \ldots + r q + r - n r q^{-1}$$

$$m(q^n - q^{n-1}) = r(q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} \ldots + \ldots + q + 1) - n r q^{-1}$$

$$m \,.\, q^{n-1}(q-1) = r \,.\, \frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{nr}{q}.$$ Daher endlich

$$m = \frac{r}{q^{n-1}(q-1)}\left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{n}{q}\right)$$

13. Den baaren Werth einer Jahresrente zu finden, die n Jahre hindurch in geometrischer Progression steigt, deren Exponent e ist.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Behält man die Bezeichnung von 10 und 11 bei, so findet man für diesen Fall: $m = \frac{r}{q} + \frac{re}{q^2} + \frac{re^2}{q^3} + \frac{re^3}{q^4} \ldots\ldots \frac{re^{n-1}}{q^n}$

$$= \frac{r}{q}\left(1 + \frac{e}{q} + \frac{e^2}{q^2} + \frac{e^3}{q^3} + \ldots\ldots \frac{e^{n-1}}{q^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{r}{q} \cdot \frac{\frac{e^n}{q^n} - 1}{\frac{e}{q} - 1} = r \cdot \frac{e^n - q^n}{q^n (e - q)}.$$

14. Den Endwerth (R) einer Jahresrente (r) zu finden, die n Jahre hindurch zu Ende eines jeden Jahres hätte gezahlt werden müssen.

Durch eine ähnliche Entwicklung wie in 9 findet man leicht

$$R = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Kann man die Gleichung nicht unmittelbar aus 9 herleiten?

15. Den Endwerth einer Jahresrente zu finden, die n Jahre hindurch zu Anfang eines jeden Jahres hätte gezahlt werden müssen.

Durch eine ähnliche Entwicklung wie in 14 findet man

$$R' = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Hätte man die Formel nicht unmittelbar aus 14 herleiten können?

Jemand will m Jahre hindurch zu Anfange eines jeden Jahres eine bestimmte Summe zahlen, damit nach Verlauf der m Jahre er selbst oder ein Anderer n Jahre hindurch eine jährliche, am Ende eines jeden Jahres zu zahlende, Rente von r Thalern genieße. Wie groß ist die jährlich zu zahlende Summe, wenn die Zinsen zu p Procent gerechnet werden?

Bezeichnen wir die jährlich zu zahlende Summe mit x, so ist der Endwerth derselben nach m Jahren nach $15 = x \cdot q \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}$. Der Anfangswerth einer Rente (r), die n Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres gezahlt wird, ist nach $10 = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Da nun beide Ausdrücke einander gleich sein müssen, so ist

$$x \cdot q \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ und daher}$$

$$x = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n+1} (q^m - 1)}.$$

Die Anwendung dieser Grundaufgaben auf die praktischen Aufgaben der Sparkassen, Lebensversicherungen u. s. w. muß dem Privatstudium überlassen werden.

Von den zusammengesetzten Reihen.

16. Eine zusammengesetzte Reihe ist eine solche, deren einzelne Glieder sich durch Multiplication der einzelnen Glieder zweier anderen Reihen gebil-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

det haben. Die einfachste zusammengesetzte Reihe ist diejenige, die sich auf diese Weise aus einer arithmetischen und geometrischen Reihe gebildet hat.

17. **Das allgemeine Glied der einfachen zusammengesetzten Reihe zu finden.** Ist die allgemeine Form der arithmetischen Reihe

$$\overset{1}{a}, \overset{2}{a + d}, \overset{3}{a + 2d}, \overset{4}{a + 3d} \ldots \quad \overset{n}{a + (n - 1)\,d}$$

und die der geometrischen Reihe

$$b, \quad be, \quad be^2, \quad be^3 \quad \ldots\ldots \quad be^{n-1},$$ so ist die zusammengesetzte Reihe $ab, (a+d)be, (a+2d)be^2, \ldots \quad [a + (n-1)\,d]\,be^{n-1}$ und das allgemeine Glied daher $T_n = [a + (n-1)\,d]\,b\,e^{n-1}$.

18. **Die Summenformel dieser Reihe zu finden.** Um die Summenformel zu finden zerlege man die einzelnen Glieder der Reihe, wie folgt:

1. Glied $\quad b = ab.$
2. Glied $\quad (a+d)\,be = abe + dbe.$
3. Glied $\quad (a+2d)\,be^2 = abe^2 + dbe^2 + dbe^2.$
4. Glied $\quad (a+3d)\,be^3 = abe^3 + dbe^3 + dbe^3 + dbe^3$

. . . .

$(n-1)$stes Glied

$$(a+(n-2)db(e^{n-2} = abe^{n-2} + dbe^{n-2} \quad \ldots\ldots \quad dbe^{n-2}$$

$n$tes Glied

$$(a+(n-1)db(e^{n-1} = \underset{\smile}{\overset{1}{a}}be^{n-1} + \overset{2}{d}be^{n-1} + \overset{3}{d}be^{n-1} + dbe^{n-1} + \overset{(n-1)}{d}be^{n-1} + db\overset{n}{e}^{n-1}$$

Auf diese Weise erhält man n Verticalreihen, von denen die erste n Glieder, die zweite $(n-1)$ Glieder u. s. w., jede folgende Reihe ein Glied weniger als die vorhergehende und die letzte ein Glied $= dbe^{n-1}$ hat. — Die Summe der ganzen Reihe ist demnach auch der Summe dieser einzelnen Verticalreihen gleich. Bezeichnet man die Summe dieser einzelnen Reihen mit $S_1, S_2, S_3 \ldots\ldots S_n$

so ist $S_1 = ab \cdot \dfrac{e^n - 1}{e - 1}$; $S_2 = dbe\left(\dfrac{e^{n-1} - 1}{e - 1}\right)$; $S_3 = dbe^2\left(\dfrac{e^{n-2} - 1}{e - 1}\right)$

und endlich $S_n = dbe^{n-1}$ oder wenn man Zähler und Nenner $e - 1$ multiplicirt $S_n = dbe^{n-1}\dfrac{(e-1)}{e-1}$.

Daher die Summe der Reihe $\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$ oder

$$\Sigma = ab\frac{(e^n - 1)}{e - 1} + dbe\frac{(e^{n-1} - 1)}{e - 1} + dbe^2\frac{(e^{n-2} - 1)}{e - 1} + \ldots \frac{dbe^{n-1}(e - 1)}{e - 1}$$

$$= \frac{ab(e^n - 1)}{e - 1} + \frac{db}{e - 1}[(e^n - e) + (e^n - e^2) + (e^n - e^3) \ldots (e^n - e^{n-1})]$$

$$= \frac{ab(e^n - 1)}{e - 1} + \frac{db}{e - 1}[(e^n + e^n + e^n \ldots \overset{(n-1)}{e^n}) - (e + e^2 + e^3 \ldots \overset{(n-1)}{e^{n-1}})]$$

$$= \frac{ab(e^n - 1)}{e - 1} + \frac{db}{e - 1}\left[(n-1)\,e^n - \frac{e\,(e^{n-1} - 1)}{e - 1}\right].$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Tabelle
der Quadrat- und Kubikzahlen, der Quadrat- und Kubikwurzeln, sowie der Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100.

Zahlen.	Quadratzahlen.	Kubikzahlen.	Quadratwurzeln.	Kubikwurzeln.	Logarithmen.
1	1	1	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	4	8	1,4142136	1,2599210	0,3010300
3	9	27	1,7320508	1,4422496	0,4771213
4	16	64	2,0000000	1,5874011	0,6020600
5	25	125	2,2360680	1,7099759	0,6989700
6	36	216	2,4494897	1,8171206	0,7781513
7	49	343	2,6457513	1,9129312	0,8450980
8	64	512	2,8284271	2,0000000	0,9030900
9	81	729	3,0000000.	2,0800838	0,9542425
10	100	1000	3,1622777	2,1544347	1,0000000
11	121	1331	3,3166248	2,2239801	1,0413927
12	144	1728	3,4641016	2,2894286	1,0791812
13	169	2197	3,6055513	2,3513347	1,1139434
14	196	2744	3,7416574	2,4101422	1,1461280
15	225	3375	3,8729833	2,4662121	1,1760913
16	256	4096	4,0000000	2,5198421	1,2041200
17	289	4913	4,1231056	2,5712816	1,2304489
18	324	5832	4,2426407	2,6207414	1,2552725
19	361	6859	4,3588990	2,6684016	1,2787536
20	400	8000	4,4721360	2,7144177	1,3010300
21	441	9261	4,5825757	2,7589243	1,3222193
22	484	10648	4,6904158	2,8020393	1,3424227
23	529	12167	4,7958315	2,8438670	1,3617278
24	576	13824	4,8989795	2,8844991	1,3802112
25	625	15625	5,0000000	2,9240177	1,3979400
26	676	17576	5,0990195	2,9624960	1,4149733
27	729	19683	5,1961524	3,0000000	1,4313638
28	784	21952	5,2915026	3,0365889	1,4471580
29	841	24389	5,3851648	3,0723168	1,4623980
30	900	27000	5,4772256	3,1072325	1,4771213

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Zahlen.	Quadratzahlen.	Kubikzahlen.	Quadratwurzeln.	Kubikwurzeln.	Logarithmen.
31	961	29791	5,5677644	3,1413806	1,4913617
32	1024	32768	5,6568542	3,1748021	1,5051500
33	1089	35937	5,7445626	3,2075343	1,5185139
34	1156	39304	5,8309519	3,2396118	1,5314789
35	1225	42875	5,9160798	3,2710663	1,5440680
36	1296	46656	6,0000000	3,3019272	1,5563025
37	1369	50653	6,0827625	3,3322218	1,5682017
38	1444	54872	6,1644140	3,3619754	1,5797836
39	1521	59319	6,2449980	3,3912114	1,5910646
40	1600	64000	6,3245553	3,4199519	1,6020600
41	1681	68921	6,4031242	3,4482172	1,6127839
42	1764	74088	6,4807407	3,4760266	1,6232493
43	1849	79507	6,5574385	3,5033981	1,6334685
44	1936	85184	6,6332496	3,5303483	1,6434527
45	2025	91125	6,7082040	3,5568933	1,6532125
46	2116	97336	6,7823300	3,5830479	1,6627578
47	2209	103823	6,8556546	3,6088261	1,6720979
48	2304	110592	6,9282032	3,6342411	1,6812412
49	2401	117649	7,0000000	3,6593057	1,6901961
50	2500	125000	7,0710678	3,6840314	1,6989700
51	2601	132651	7,1414284	3,7084298	1,7075702
52	2704	140608	7,2111026	3,7325111	1,7160033
53	2809	148877	7,2801099	3,7562858	1,7242759
54	2916	157464	7,3484692	3,7797631	1,7323938
55	3025	166375	7,4161985	3,8029525	1,7403627
56	3136	175616	7,4833148	3,8258624	1,7481880
57	3249	185193	7,5498344	3,8485011	1,7558749
58	3364	195112	7,6157731	3,8708766	1,7634280
59	3481	205379	7,6811457	3,8929965	1,7708520
60	3600	216000	7,7459667	3,9148676	1,7781513
61	3721	226981	7,8102497	3,9364972	1,7853298
62	3844	238328	7,8740079	3,9578915	1,7923917
63	3969	250047	7,9372540	3,9790571	1,7993405
64	4096	262144	8,0000000	4,0000000	1,8061800
65	4225	274625	8,0622577	4,0207256	1,8129134
66	4356	287496	8,1240384	4,0412401	1,8195439

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Zahlen.	Quadratzahlen.	Kubikzahlen.	Quadratwurzeln.	Kubikwurzeln.	Logarithmen.
67	4489	300763	8,1853528	4,0615480	1,8260748
68	4624	314432	8,2462113	4,0816551	1,8325089
69	4761	328509	8,3066239	4,1015661	1,8388491
70	4900	343000	8,3666003	4,1212853	1,8450980
71	5041	357911	8,4261498	4,1408178	1,8512583
72	5184	373248	8,4852814	4,1601676	1,8573325
73	5329	389017	8,5440037	4,1793392	1,8633229
74	5476	405224	8,6023253	4,1983364	1,8692317
75	5625	421875	8,6602540	4,2171633	1,8750613
76	5776	438976	8,7177979	4,2358236	1,8808136
77	5929	456533	8,7749644	4,2543210	1,8864907
78	6084	474552	8,8317609	4,2726586	1,8920946
79	6241	493039	8,8881944	4,2908404	1,8976271
80	6400	512000	8,9442719	4,3088695	1,9030900
81	6561	531441	9,0000000	4,3267487	1,9084850
82	6724	551368	9,0553851	4,3444815	1,9138139
83	6889	571787	9,1104336	4,3620707	1,9190781
84	7056	592704	9,1651514	4,3795191	1,9242793
85	7225	614125	9,2195445	4,3968296	1,9294189
86	7396	636056	9,2736185	4,4140049	1,9344985
87	7569	658503	9,3273791	4,4310476	1,9395193
88	7744	681472	9,3808315	4,4479602	1,9444827
89	7921	704969	9,4339811	4,4647451	1,9493900
90	8100	729000	9,4868330	4,4814047	1,9542425
91	8281	753571	9,5393920	4,4979414	1,9590414
92	8464	778688	9,5916630	4,5143574	1,9637878
93	8649	804357	9,6436508	4,5306549	1,9684829
94	8836	830584	9,6953597	4,5468359	1,9731279
95	9025	857375	9,7467943	4,5629026	1,9777236
96	9216	884736	9,7979590	4,5788570	1,9822712
97	9409	912673	9,8488578	4,5947009	1,9867717
98	9604	941192	9,8994949	4,6104363	1,9912261
99	9801	970299	9,9498744	4,6260650	1,9956352
100	10000	1000000	10,0000000	4,6415888	2,0000000

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Tabelle
zur Vergleichung verschiedener Maß- und Gewichtseinheiten.

Längenmaße.

	Metre.	Pariser Fuß.	England, Rußland. Fuß.	Preußen, Dänemark. Rhein. Fuß.	Braunschw. Fuß.	Baden, Schweiz. Fuß.	Wiener Fuß.
1	1	3,0784	3,2809	3,1862	3,5043	3,3333	3,1634
2	0,3248	1	1,0658	1,0350	1,1383	1,0828	1,0276
3	0,3048	0,9383	1	0,9711	1,0681	1,0160	0,9642
4	0,3139	0,9662	1,0298	1	1,0998	1,0462	0,9929
5	0,2854	0,8785	0,9362	0,9092	1	0,9512	0,9027
6	0,3000	0,9235	0,9843	0,9559	1,0513	1	0,9490
7	0,3161	0,9731	1,0371	1,0072	1,1078	1,0537	1

Flächenmaße.

	Q.-Metre.	Pariser Q.-Fuß.	England, Rußland. Q.-Fuß.	Preußen, Dänemark. Rhn. Q.-Fuß.	Braunschw. Q.-Fuß.	Baden, Schweiz. Q.-Fuß.	Wiener Q.-Fuß.
1	1	9,4768	10,7643	10,1519	12,2802	11,1111	10,0074
2	0,1055	1	1,1359	1,0712	1,2958	1,1725	1,0560
3	0,0929	0,8804	1	0,9431	1,1408	1,0322	0,9297
4	0,0985	0,9335	1,0603	1	1,2097	1,0945	0,9858
5	0,0814	0,7717	0,8766	0,8267	1	0,9048	0,8149
6	0,0900	0,8529	0,9688	0,9137	1,1052	1	0,9007
7	0,0999	0,9470	1,0756	1,0144	1,2271	1,1103	1

Körpermaße.

	C.-Metre.	Pariser C.-Fuß.	England, Rußland. Fuß.	Preußen, Dänemark. Rheinl. Fuß.	Braunschw. Fuß.	Baden, Schweiz. Fuß.	Wiener Fuß.
1	1	29,1739	35,3166	32,3459	43,0338	37,0370	31,6579
2	0,0343	1	1,2106	1,1087	1,4751	1,2695	1,0851
3	0,0283	0,8261	1	0,9159	1,2185	1,0487	0,8964
4	0,0309	0,9019	1,0918	1	1,3304	1,1450	0,9787
5	0,0232	0,6779	0,8207	0,7516	1	0,8606	0,7357
6	0,0270	0,7877	0,9535	0,8733	1,1619	1	0,8548
7	0,0316	0,9215	1,1156	1,0217	1,3593	1,1699	1

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Verschiedene Feldmaße.

	Frankreich Hectare 100 Q.=Dec.	England. Acre 160 Q.=R.	Preußen. Morgen 180 Q.=R.	Braunschweig. Morgen 120 Q.=R.	Baden, Schweiz. 400 Q.=R.	Wiener Joch 1600 Q.=Klft.	Rußland. Deßjätine 2400 Q.=Fad.
1	1	2,4711	3,9166	3,9975	2,7778	1,7374	0,9153
2	0,4047	1	1,5849	1,6177	1,1241	0,7031	0,3704
3	0,2553	0,6309	1	1,0206	0,7092	0,4436	0,2337
4	0,2502	0,6182	0,9798	1	0,6949	0,4346	0,2290
5	0,3600	0,8896	1,4100	1,4391	1	0,6255	0,3295
6	0,5756	1,4223	2,2543	2,3008	1,5988	1	0,5268
7	1,0925	2,6997	4,2789	4,3672	3,0347	1,8981	1

Meilenmaße.

	Frankreich Myriameter 10,000 M.	England. Meile 5280 Fuß.	Preußen, Dänemark. Meile 24,000 Fuß.	Braunschweig. Meile 26,000 Fuß.	Deutsche Geogr. Meile 15 = 1 Grad.	Rußland. Werst 3500 Fuß.	Franz., Engl. Seemeile 20 = 1 Grad.
1	1	6,2138	1,3276	1,3478	1,3477	9,3740	1,7969
2	0,1609	1	0,2136	0,2169	0,2169	1,5086	0,2892
3	0,7532	4,6806	1	1,0152	1,0151	7,0610	1,3535
4	0,7419	4,6103	0,9850	1	0,9999	6,9550	1,3332
5	0,7420	4,6108	0,9851	1,0001	1	6,9557	1,3333
6	0,1067	0,6629	0,1416	0,1438	0,1438	1	0,1917
7	0,5565	3,4581	0,7388	0,7501	0,7500	5,2167	1

Maße für Flüssigkeiten.

	Frankreich. Litre 9001 C.=M.	England. Gallon 277,2738 C.Z.	Preußen. Quart 64 C.=Zoll.	Braunschweig. $52^{4}/_{11}$ C.=Zoll pr.	Baden, Schweiz. Maß $^{1}/_{18}$ C.=Fuß.	Oesterreich. Maß 0,0448 C.=Z.	Rußland. Stoof 75 C.=Zoll.
1	1	0,2201	0,8733	1,0674	0,6667	0,7066	0,8137
2	4,5435	1	3,9680	4,8498	3,0290	3,2106	3,6970
3	1,1450	0,2520	1	1,2222	0,7634	0,8091	0,9317
4	0,9368	0,2062	0,8182	1	0,6246	0,6620	0,7623
5	1,5000	0,3301	1,3100	1,6011	1	1,0600	1,2205
6	1,4151	0,3115	1,2359	1,5105	0,9434	1	1,1515
7	1,2290	0,2705	1,0733	1,3118	0,8193	0,8684	1

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Maße für trockene Gegenstände.

	Frankreich Hectolitre 100 Litres.	England. Bushel 8 Gallons.	Preußen. Scheffel 3072 C.-Z.	Braunschweig. Himpten 2316 C.-Z.	Baden, Schweiz. Malter 100 Maß.	Oesterreich. Metze 1,9491 C.-F.	Rußland. Tschetwerik 1600 C.-Z.
1	1	2,7512	1,8195	3,2108	0,6667	1,6259	3,8142
2	0,3635	1	0,6613	1,1671	0,2423	0,5910	1,3864
3	0,5496	1,5121	1	1,7647	0,3664	0,8936	2,0963
4	0,3114	0,8569	0,5667	1	0,2076	0,5064	1,1879
5	1,5000	4,1268	2,7292	4,8162	1	2,4388	5,7213
6	0,6150	1,6921	1,1190	1,9748	0,4100	1	2,3459
7	0,2622	0,7213	0,4770	0,8418	0,1748	0,4263	1

Gewichte (Pfunde).

	Frankreich Kilogramm.	England. Pfund Adp.	Preußen, Hannover, Frankfurt, Kurhessen. Pfund.	Zollpfund Vereinsgewicht.	Köln. Mark.	Oesterreich. Pfund.	Rußland. Pfund.
1	1	2,2046	2,1381	2,0000	4,2769	1,7857	2,4419
2	0,4536	1	0,9698	0,9072	1,9400	0,8100	1,1076
3	0,4677	1,0311	1	0,9354	2,0004	0,8352	1,1421
4	0,5000	1,1023	1,0690	1	2,1385	0,8928	1,2209
5	0,2338	0,5155	0,4999	0,4676	1	0,4175	0,5709
6	0,5600	1,2346	1,1973	1,1200	2,3951	1	1,3675
7	0,4095	0,9028	0,8756	0,8190	1,7515	0,7313	1

Gewichte (Centner).

	Frankreich Quintal 100 Kilogr.	England. Hndrdwight 112 Pfund.	Preußen. Centner 110 Pfund.	Vereinsgewicht. Centner 100 Pfund.	Schweden. Centner 120 Pfund.	Oesterreich. Centner 160 Pfund.	Rußland. Pud 40 Pfund.
1	1	1,9684	1,9437	2,0000	1,9592	1,7857	6,1047
2	0,5080	1	0,9875	1,0161	0,9953	0,9072	3,1014
3	0,5145	1,0127	1	1,0290	1,0080	0,9187	3,1408
4	0,5000	0,9842	0,9719	1	0,9796	0,8928	3,0524
5	0,5104	1,0047	0,9921	1,0208	1	0,9114	3,1159
6	0,5600	1,1023	1,0885	1,1200	1,0972	1	3,4187
7	0,1638	0,3224	0,3184	0,3276	0,3209	0,2925	1

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Berichtigungen.

Seite	16	Zeile	9 v. o.	statt von lies zu.
»	21	»	21 v. o.	statt $(a-b)$ $[a-b)^2-a^2b]$ q^2 lies $(a-b)^3 q^2$.
»	54	»	23 v. o.	statt und lies und dann.
»	79	»	9 v. u.	statt 54 lies 5 . 4.
»	79	»	8 v. u.	statt 53 lies 5 . 3.
»	101	»	1 v. u.	statt $\frac{y^2}{3a}$ lies $\frac{y^2}{a}$.
»	110	»	19 v. o.	statt $1 - \frac{a}{1-\frac{b}{a}}$ lies $a : \frac{1}{1-\frac{b}{a}}$
»	120	»	12 v. o.	statt 23402 lies 23403.
»	126	»	6 v. o.	statt A lies cf.
»	128	»	4 v. o.	statt 9,45 lies 9,45 x.
»	131	»	3 v. u.	statt $\frac{100}{100+p}$ lies $\frac{p}{100+p}$.
»	141	»	1 und 2 v. o.	statt 14 lies 11.
»	143	»	11 v. o.	statt π^2 und $\pi^2 - 2$ lies $\pi^2 + 1$ und $\pi^2 - 1$.
»	144	»	3 v. o.	statt $23\frac{1}{2}$ lies $22\frac{1}{2}$.
»	144	»	4 v. o.	statt $\frac{1}{12}$ lies $-\frac{1}{12}$.
»	149	»	13 v. u.	statt 160 lies 128.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

Im Verlage der Schulbuchhandlung in Braunschweig ist erschienen:

Die Auflösung

der

algebraischen und transzendenten Gleichungen

mit

einer und mehreren Unbekannten in reellen und komplexen Zahlen nach neuen und zur praktischen Anwendung geeigneten Methoden.

Von

Dr. Hermann Scheffler,

Baurath.

Mit 35 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

gr. 8. fein Velinpapier. geh. Preis 24 Ngr.

Das vorstehende Werk befaßt sich mit der Auflösung der Zahlengleichungen, sowohl der algebraischen, wie auch der transzendenten. Die dazu in Anwendung gebrachten Methoden sind nicht blos zur Berechnung der reellen, sondern auch zu der der komplexen Wurzeln geeignet. Außerdem sind sie auf die Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten ausgedehnt worden. Vor allen Dingen aber ist das Augenmerk des Verfassers auf möglichste Vereinfachung der Rechnung und auf praktische Brauchbarkeit gerichtet gewesen. Hiernach dürfte das Werk in gleichem Maaße das Interesse der Mathematiker, wie der durch mathematische Rechnungen vielfach in Anspruch genommenen Ingenieure berühren.

Der

Pentateuch,

grammatisch zergliedert, nebst sprachlichen Erläuterungen von Raschi und vollständigen Biegungstabellen.

Für

Schüler des Hebräischen

auf

Gymnasien, Universitäten und Clericalseminarien,

sowie für

angehende israelitische Lehrer,

Von

Dr. Emanuel Hecht,

Lehrer.

gr. 8. Velinpapier. geh. Preis 1 Thlr. 10 Ngr.

Dieses Buch ist besonders wichtig als Hülfsmittel für das Privatstudium des Hebräischen; es gibt dem Anfänger die Mittel an die Hand, zu einer raschen Beherrschung des Sprachstoffs zu gelangen, indem es das zeitraubende Herumblättern in Lexikon und Grammatik erspart.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726

Digitale Bibliothek Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054726